

**Θέμα 1.**(2 Βαθμοί)

(α) Αν τα ενδεχόμενα  $A_1, A_2, A_3$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητα να αποδείξετε ότι και τα ενδεχόμενα  $A = A_1$  και  $B = A_2 \cup A_3$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητα.

(β) Αν  $X$  είναι μία τυχαία μεταβλητή με  $\mathbb{E}(2X+3) = 6$  και  $\text{Var}(-2X+3) = 9$  να υπολογισθεί η  $\mathbb{E}[(2X-1)^2]$ .

**Θέμα 2.**(2 Βαθμοί) Η κάλπη A περιέχει 10 σφαιρίδια με τους αριθμούς  $\{1, 2, \dots, 10\}$  ενώ η κάλπη B περιέχει 20 σφαιρίδια με τους αριθμούς  $\{1, 2, \dots, 20\}$ . Στην A τα σφαιρίδια με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 είναι χρυσά και τα υπόλοιπα ασημένια, ενώ στην B τα σφαιρίδια με τους αριθμούς 1 και 2 είναι ασημένια και τα υπόλοιπα χρυσά. Διαλέγουμε μία κάλπη στην τύχη από την οποία επιλέγουμε δύο σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα τα δύο σφαιρίδια που εκλέχθηκαν να είναι χρυσά;

(β) Αν είναι γνωστό ότι και τα δύο σφαιρίδια που επιλέχθηκαν είναι χρυσά, ποια είναι η πιθανότητα να είχαμε επιλέξει αρχικά την κάλπη A;

**Θέμα 3.**(3 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(1, 3)$ ,  $U(1, 3)$ . Θέτουμε  $Y = X + 3/X$ . Να προσδιορίσετε:

(α) Την μέση τιμή της  $Y$ ,  $\mathbb{E}(Y)$ .

(β) Την συνάρτηση κατανομής της  $Y$ ,  $F_Y(t)$  (για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ ).

(γ) Την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$ ,  $f_Y(t)$ .

**Θέμα 4.**(3 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2, δηλ. η  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_X(t) = 2e^{-2t}$ ,  $t > 0$ . Για  $a > 0$  θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $Y_a = 1/X^a$ . Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή και η διασπορά της  $Y_a$  (αφού προσδιορίσετε για ποιες τιμές του  $a > 0$  υπάρχουν).

(β) Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y_a$ .

(γ) Η διάμεσος της  $Y_a$ , δηλ. η τιμή  $\delta = \delta_a$  για την οποία ισχύει η σχέση

$$\mathbb{P}(Y_a \leq \delta_a) = \mathbb{P}(Y_a \geq \delta_a) = \frac{1}{2}.$$

**Διάρκεια  $2\frac{1}{2}$  ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

**Οδηγίες:**

- 1) Τα θέματα παραδίδονται μαζί με το γραπτό (αλλιώς το γραπτό θα μηδενίζεται).
- 2) Όποιος θέλει να θέσει «ρήτρα» για τον βαθμό του θα πρέπει να το δηλώσει στην 1η σελίδα του γραπτού, π.χ. «ρήτρα  $\geq 7$ », και να υπογράψει.
- 3) Όποιος πάρει θέματα δεν επιτρέπεται να αποχωρήσει από την εξέταση πριν συμπληρωθούν 30 λεπτά.
- 4) Η τουαλέτα δεν επιτρέπεται.
- 5) Όλα τα υποερωτήματα ((α), (β) κ.λπ.) βαθμολογούνται με μία μονάδα.