

Θέμα 1.(2 Βαθμοί)

(α) Αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι στοχαστικά ανεξάρτητα να αποδείξετε ότι και τα ενδεχόμενα $A = A_1 \cup A_2$ και $B = A_3$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητα.

(β) Αν X είναι μία τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(2X+5) = 8$ και $\text{Var}(-2X+1) = 9$ να υπολογισθεί η $\mathbb{E}[(2X-1)^2]$.

Θέμα 2.(2 Βαθμοί) Η κάλπη Α περιέχει 10 σφαιρίδια με τους αριθμούς $\{1, 2, \dots, 10\}$ ενώ η κάλπη Β περιέχει 20 σφαιρίδια με τους αριθμούς $\{1, 2, \dots, 20\}$. Στην Α τα σφαιρίδια με τους αριθμούς 1 και 2 είναι χρυσά και τα υπόλοιπα ασημένια, ενώ στην Β τα σφαιρίδια με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 είναι ασημένια και τα υπόλοιπα χρυσά. Διαλέγουμε μία κάλπη στην τύχη από την οποία επιλέγουμε δύο σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα τα δύο σφαιρίδια που εκλέχθηκαν να είναι χρυσά;

(β) Αν είναι γνωστό ότι και τα δύο σφαιρίδια που επιλέχθηκαν είναι χρυσά, ποια είναι η πιθανότητα να είχαμε επιλέξει αρχικά την κάλπη Α;

Θέμα 3.(3 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1, 2)$, $U(1, 2)$. Θέτουμε $Y = X + 2/X$. Να προσδιορίσετε:

(α) Την μέση τιμή της Y , $\mathbb{E}(Y)$.

(β) Την συνάρτηση κατανομής της Y , $F_Y(t)$ (για κάθε $t \in \mathbb{R}$).

(γ) Την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y , $f_Y(t)$.

Θέμα 4.(3 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 3, δηλ. η X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t) = 3e^{-3t}$, $t > 0$. Για $a > 0$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y_a = 1/X^a$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή και η διασπορά της Y_a (αφού προσδιορίσετε για ποιες τιμές του $a > 0$ υπάρχουν).

(β) Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y_a .

(γ) Η διάμεσος της Y_a , δηλ. η τιμή $\delta = \delta_a$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\mathbb{P}(Y_a \leq \delta_a) = \mathbb{P}(Y_a \geq \delta_a) = \frac{1}{2}.$$

Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Οδηγίες:

- 1) Τα θέματα παραδίδονται μαζί με το γραπτό (αλλιώς το γραπτό θα μηδενίζεται).
- 2) Όποιος θέλει να θέσει «ρήτρα» για τον βαθμό του θα πρέπει να το δηλώσει στην 1η σελίδα του γραπτού, π.χ. «ρήτρα ≥ 7 », και να υπογράψει.
- 3) Όποιος πάρει θέματα δεν επιτρέπεται να αποχωρήσει από την εξέταση πριν συμπληρωθούν 30 λεπτά.
- 4) Η τουαλέτα δεν επιτρέπεται.
- 5) Όλα τα υποερωτήματα ((α), (β) κ.λπ.) βαθμολογούνται με μία μονάδα.