# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2016

**B**

**Θέμα 1.** (α) Οι 20 επιβάτες ενός τραίνου θα αποβιβαστούν τυχαία στις επόμενες τρεις στάσεις $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$. Να βρεθεί η πιθανότητα να αποβιβαστεί τουλάχιστον ένας επιβάτης σε καθεμία από τις τρεις στάσεις.
(β) Έστω $X$ μία τυχαία μεταβλητή με $E(X) = 2$ και $E(X^2) = 13$. Να δειχθεί ότι

$$P(-2 \leq X \leq 6) \geq \frac{7}{16}.$$

**Θέμα 2.** Η $X$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} c - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ σταθερά.
(α) Βρείτε τη σταθερά $c$.
(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(γ) Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ .
(δ) Να αναλυθεί σε δυναμοσειρά η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της $X$.

**Θέμα 3.** Ο αριθμός $X$ των πελατών που εισέρχονται σε ένα κατάστημα στη διάρκεια μίας ημέρας ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή 90. Κάθε πελάτης, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, πληρώνει με κάρτα με πιθανότητα 4/9, ή με μετρητά (με πιθανότητα 5/9). Έστω $Y$ ο αριθμός των πελατών που πληρώνει με κάρτα στη διάρκεια μίας ημέρας. Να βρείτε (α) την μέση τιμή της $Y$, (β) την διασπορά της $Y$, και (γ) τον συντελεστή συσχέτισης $\rho = \rho(X, Y)$ των $X$ και $Y$. Είναι οι $X, Y$ ανεξάρτητες;

**Θέμα 4.** (α) Έστω $X$ συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & e^{-1/2} < x < e^{1/2}, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθεί η πυκνότητα πιθανότητας της $Y = \ln X$.
(β) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με πυκνότητα πιθανότητας την $f_X$ του Ερωτήματος (α). Αν $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$, να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\ln Z_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi\left(x\sqrt{12}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**