

Θέμα 1. (α) Οι 30 επιβάτες ενός λεωφορείου θα αποβιβαστούν τυχαία στις επόμενες τρεις στάσεις $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Να βρεθεί η πιθανότητα να αποβιβαστεί τουλάχιστον ένας επιβάτης σε καθεμία από τις τρεις στάσεις.

(β) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με $E(X) = 3$ και $E(X^2) = 13$. Ναδειχθεί ότι

$$P(-2 \leq X \leq 8) \geq \frac{21}{25}.$$

Θέμα 2. Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} c - x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ σταθερά.

(α) Βρείτε τη σταθερά c .

(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^n)$, $n = 1, 2, \dots$.

(δ) Να αναλυθεί σε δυναμοσειρά η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X .

Θέμα 3. Ο αριθμός X των πελατών που εισέρχονται σε ένα κατάστημα στη διάρκεια μίας ημέρας ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή 120. Κάθε πελάτης, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, πληρώνει με κάρτα με πιθανότητα $1/4$, ή με μετρητά (με πιθανότητα $3/4$). Έστω Y ο αριθμός των πελατών που πληρώνει με κάρτα στη διάρκεια μίας ημέρας. Να βρείτε (α) την μέση τιμή της Y , (β) την διασπορά της Y , και (γ) τον συντελεστή συσχέτισης $\rho = \rho(X, Y)$ των X και Y . Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Θέμα 4. (α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & e^{-1} < x < e, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθεί η πυκνότητα πιθανότητας της $Y = \ln X$.

(β) Έστω X_1, X_2, \dots ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με πυκνότητα πιθανότητας την f_X του Ερωτήματος (α). Αν $W_n = \prod_{i=1}^n X_i$, να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\ln W_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x\sqrt{3}), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!