ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, Απρίλιος 2014 **B**

Σύντομες Απαντήσεις.

Θ1. Θέτουμε $Y =$ ένδειξη ζαριού, $X =$ πλήθος «Γ», $A = \{$το νόμισμα έφερε «Γ» σε όλες τις δοκιμές$\}$.

(α). Προφανώς ισχύει $P(Y=\nu)=\frac{1}{6}$, $P(A|Y=\nu)=P(X=\nu|Y=\nu)=(\frac{1}{2})^\nu$, οπότε από το Θ.Ο.Π., $P(A)=\sum_{\nu=1}^{6}P(A|Y=\nu)P(Y=\nu)=\frac{1}{6}\sum_{\nu=1}^{6}(\frac{1}{2})^\nu=\frac{63}{384}=\frac{21}{128}=0.1640625$.

(β) Από τον τύπο Bayes και το (α), $P(Y=3|A)=\frac{P(A|Y=3)P(Y=3)}{P(A)}=\frac{(1/2)^3(1/6)}{21/128}=\frac{8}{63}\simeq 0.127$.

(γ) Η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου $\{Y=\nu\}$ είναι Διωνυμική$(\nu,\frac{1}{2})$. Επομένως, $E(X|Y=\nu)=\frac{\nu}{2}$, $E(X|Y)=\frac{1}{2}Y$. Αφού $E(Y)=\frac{7}{2}$, προκύπτει ότι

$$E(X)=E\{E(X|Y)\}=E(\tfrac{1}{2}Y)=\tfrac{1}{2}E(Y)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{7}{2}=\tfrac{7}{4}=1.75.$$

Θ2. Η συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{4}x^2, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

(α) Η X παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,2)$ οπότε η $|1-X|$ παίρνει τιμές στο $[0,1)$. Προφανώς $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|1-X|\le y)=0$ όταν $y<0$. Για $y\ge 0$ έχουμε $|1-X|\le y \iff 1-y\le X\le 1+y$. Επομένως, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|1-X|\le y)=P(1-y\le X\le 1+y)=P(X\le 1+y)-P(X<1-y)=F(1+y)-F((1-y)-)=F(1+y)-F(1-y)$ (η τελευταία ισότητα επειδή η συγκεκριμένη F είναι συνεχής). Για την συγκεριμένη F και για τυχόν $y\ge 0$ έχουμε

$$F(1+y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+y)^2, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}\qquad F(1-y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-y)^2, & 0\le y\le 1,\\ 0, & y\ge 1.\end{cases}$$

Συνεπώς,

$$F_Y(y)=F(1+y)-F(1-y)=\left\{\begin{array}{ll}0, & y\le 0,\\ \frac{1}{4}(1+y)^2-\frac{1}{4}(1-y)^2, & 0\le y\le 1,\\ 1-0, & y\ge 1,\end{array}\right\}=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ y, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}$$

που είναι η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης στο διάστημα $(0,1)$, δηλ. $Y\sim U(0,1)$.

(β) $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$ [Η παράγωγος δεν υπάρχει όταν $y=0$ ή 1, οπότε ορίζουμε αυθαίρετα την πυκνότητα στα δύο αυτά σημεία.]

(γ) Υπολογίζουμε

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2x^2dx=\frac{4}{3},\quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2x^3dx=2,$$

οπότε $Var(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{2}{9}$. Επίσης, $E(Y)=\frac{1}{2}$, $Var(Y)=\frac{1}{12}$, επειδή $Y\sim U(0,1)$. Τέλος,

$$E\{XY\}=E\{X\cdot|1-X|\}=\frac{1}{2}\int_0^2x^2|1-x|dx=\frac{1}{2}\int_0^1x^2(1-x)dx+\frac{1}{2}\int_1^2x^2(x-1)dx=\frac{3}{4},$$

οπότε $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{4}-(\frac{4}{3})(\frac{1}{2})=\frac{1}{12}$. Τελικά,

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(X)}}=\frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{1}{12}}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}\simeq 0.612.$$

Θ3. Έστω β η ποσότητα που παρασκευάζει η εταιρεία. Αυτή η ποσότητα κοστίζει 20β ενώ η συνολική είσπραξη στο τέλος του έτους είναι $60\min\{X,\beta\}$. Συνεπώς, το κέρδος Y ισούται με $Y = 60\min\{X,\beta\} - 20\beta$ και το αναμενόμενο (= μέσο) κέρδος είναι

$$E(Y) = E(60\min\{X,\beta\} - 20\beta) = 60E(\min\{X,\beta\}) - 20\beta.$$

Από τον τύπο «αφηρημένου μαθηματικού» έχουμε

$$E(\min\{X,\beta\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x,\beta\} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \min\{x,\beta\}dx = \frac{1}{3}\int_0^\beta x dx + \frac{1}{3}\int_\beta^3 \beta dx = \beta - \frac{\beta^2}{6}$$

και συνεπώς, $E(Y) = 60(\beta - \frac{\beta^2}{6}) - 20\beta = 40\beta - 10\beta^2 = h(\beta)$. Ελέγχοντας το πρόσημο της παραγώγου, $h'(\beta) = 40 - 20\beta$, βρίσκουμε την ποσότητα η οποία μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος, $h(\beta)$:

$$\beta = \beta^* = 2.$$

[Η συγκεκριμένη ποσότητα είναι μεγαλύτερη της μέσης ζήτησης, $E(X) = 1.5$.]

Θ4. Αφού $Y \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ και $\mu = \frac{\alpha}{\lambda} = 3$, $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} = 2$, βρίσκουμε $\alpha = \frac{9}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$.
(α) Για $k \neq j$ έχουμε $Cov(X_k, X_j) = Cov(\frac{1}{k}Y + Y_k, \frac{1}{j}Y + Y_j) = \frac{2}{k \cdot j} > 0$ επειδή $Cov(Y,Y) = Var(Y) = 2$ ενώ $Cov(Y,Y_j) = Cov(Y_k,Y) = Cov(Y_k,Y_j) = 0$, διότι οι Y, Y_k, Y_j είναι εξ' υποθέσεως ανεξάρτητες – άρα, και ασυσχέτιστες (διότι έχουν πεπερασμένη διασπορά). Επομένως, οι X_k, X_j είναι εξαρτημένες, διότι αν ήταν ανεξάρτητες θα ήταν και ασυσχέτιστες.

Η $X_1 = Y + Y_1$ είναι άθροισμα των ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών Y, Y_1, οι οποίες ακολουθούν κατανομή Γάμμα με κοινή δεύτερη παράμετρο (και πρώτη). Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτριά τους δίνεται από τον τύπο

$$M_Y(t) = M_{Y_1}(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}, \quad t < \lambda,$$

που είναι πεπερασμένη σε μία περιοχή του μηδενός. Από την ανεξαρτησία των e^{tY}, e^{tY_1} προκύπτει ότι $M_{X_1}(t) = E(e^{t(Y+Y_1)}) = E(e^{tY}e^{tY_1}) = E(e^{tY})E(e^{tY_1}) = M_Y(t)M_{Y_1}(t) = (1-t/\lambda)^{-2\alpha}$, $t < \lambda$. Αυτή είναι η ροπογεννήτρια της κατανομής $\Gamma(2\alpha,\lambda)$. Άρα $X_1 \sim \Gamma(9, \frac{3}{2})$, με πυκνότητα

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{(\frac{3}{2})^9}{\Gamma(9)} x_1^8 e^{-\frac{3}{2}x_1} = \frac{(\frac{3}{2})^9}{8!} x_1^8 e^{-\frac{3}{2}x_1}, \ x_1 > 0.$$

(β) Στο (α) υπολογίσαμε $Cov(X_k, X_j) = \frac{2}{k \cdot j}$, $k \neq j$. Επίσης, $Var(X_k) = Var(\frac{1}{k}Y + Y_k) = Var(\frac{1}{k}Y) + Var(Y_k) = (\frac{1}{k})^2 Var(Y) + Var(Y_k) = 2(\frac{1}{k^2} + 1)$, όπου η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από την ανεξαρτησία των Y, Y_k. Συνεπώς,

$$Var(\sum_{k=1}^{\nu} X_k) = \sum_{k=1}^{\nu} 2(\frac{1}{k^2} + 1) + \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j\neq k} \frac{2}{k \cdot j} = 2\nu + 2\left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j\neq k}\frac{1}{k\cdot j}\right)$$

$$= 2\nu + 2\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{k\cdot j} = 2\nu + 2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{j} = 2\nu + 2\left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\right)^2.$$

Έχουμε τελικά

$$\sigma_\nu^2 = Var(\overline{X}_\nu) = Var(\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} X_k) = \frac{1}{\nu^2} Var(\sum_{k=1}^{\nu} X_k) = \frac{2}{\nu} + 2\left(\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\right)^2.$$

Επίσης, από την γραμμικότητα της μέσης τιμής, $E(X_k) = E(\frac{1}{k}Y + Y_k) = \frac{1}{k}E(Y) + E(Y_k) = 3 + \frac{3}{k}$ και

$$\mu_\nu = E(\overline{X}_\nu) = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} E(X_k) = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\{3 + \frac{3}{k}\} = \frac{1}{\nu}(3\nu) + \frac{3}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} = 3 + 3\left(\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\right).$$

Από τις πιο πάνω εκφράσεις έπεται ότι $\lim_{\nu\to\infty}\mu_\nu = 3$, $\lim_{\nu\to\infty}\sigma_\nu^2 = 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Από την ανισότητα Markov $[P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$, $X \geq 0$, $\alpha > 0]$ εφαρμοζόμενη στην (μη αρνητική) τυχαία μεταβλητή $X = (\overline{X}_\nu - 3)^2$ και για $\alpha = \epsilon^2 > 0$, έχουμε

$$0 \leq P(|\overline{X}_\nu - 3| \geq \epsilon) = P\{(\overline{X}_\nu - 3)^2 \geq \epsilon^2\} \leq \frac{E\{(\overline{X}_\nu - 3)^2\}}{\epsilon^2}.$$

Γράφοντας $(\overline{X}_\nu - 3)^2 = [(\overline{X}_\nu - \mu_\nu) + (\mu_\nu - 3)]^2 = (\overline{X}_\nu - \mu_\nu)^2 + (\mu_\nu - 3)^2 + 2(\mu_\nu - 3)(\overline{X}_\nu - \mu_\nu)$ έχουμε

$$E\{(\overline{X}_\nu - 3)^2\} = E\{(\overline{X}_\nu - \mu_\nu)^2\} + (\mu_\nu - 3)^2 + 2(\mu_\nu - 3)E(\overline{X}_\nu - \mu_\nu) = \sigma_\nu^2 + (\mu_\nu - 3)^2,$$

επειδή $\mu_\nu = E(\overline{X}_\nu)$, οπότε ο πρώτος όρος ισούται με την διασπορά, σ_ν^2, της $\overline{X}_\nu$ και $E(\overline{X}_\nu - \mu_\nu) = E(\overline{X}_\nu) - \mu_\nu = \mu_\nu - \mu_\nu = 0$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε

$$0 \leq P(|\overline{X}_\nu - 3| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_\nu^2 + (\mu_\nu - 3)^2}{\epsilon^2} \to 0, \quad \nu \to \infty,$$

επειδή $\mu_\nu \to 3$, $\sigma_\nu^2 \to 0$ και το $\epsilon > 0$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του ν). Άρα

$$\lim_{\nu\to\infty} P(|\overline{X}_\nu - 3| \geq \epsilon) = 0.$$

Αφού το $\epsilon > 0$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρό, έπεται από τον ορισμό της στοχαστικής σύγκλισης (ή σύγκλισης κατά πιθανότητα) ότι η ακολουθία $\overline{X}_\nu$ συγκλίνει στοχαστικά στη σταθερά $c = 3$.