ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, Απρίλιος 2014 **B**

Θέμα 1. Ρίχνουμε πρώτα ένα συνηθισμένο ζάρι και στη συνέχεια, παρατηρώντας την ένδειξη $Y = \nu$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, του ζαριού, ρίχνουμε ένα συνηθισμένο νόμισμα ν ανεξάρτητες φορές. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το πλήθος φορών που το νόμισμα έφερε «Γ». Να βρεθούν:

(α) η πιθανότητα το νόμισμα να εμφανίσει «Γ» σε όλες τις ρίψεις.

(β) η (δεσμευμένη) πιθανότητα το ζάρι να είχε φέρει την ένδειξη 3 αν είναι γνωστό ότι το νόμισμα εμφάνισε «Γ» σε όλες τις ρίψεις.

(γ) η μέση τιμή (ο αναμενόμενος αριθμός) του πλήθους εμφανίσεων «Γ».

Θέμα 2. Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y = |1 - X|$. Υπολογίστε:

(α) την συνάρτηση κατανομής της Y, $F_Y(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

(β) την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y, $f_Y(y)$.

(γ) τον συντελεστή συσχέτισης ρ των X και Y.

Θέμα 3. Η ζήτηση X ενός φαρμάκου κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 3)$. Η φαρμακευτική εταιρεία θέλει να παρασκευάσει στην αρχή του έτους ποσότητα $\beta \in (0, 3)$ του φαρμάκου. Διευκρινίζεται ότι η εταιρεία θα παρασκευάσει όλη την ποσότητα του φαρμάκου στην αρχή του έτους, τότε που δεν γνωρίζει την μελλοντική ζήτηση X. Η παρασκευή της ποσότητας β έχει κόστος παραγωγής 20β (το κόστος ανά μονάδα παραγωγής είναι 20), ενώ η τιμή πώλησης ανά μονάδα είναι 60. Να προσδιοριστεί η τιμή β^* που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας.
[Υπόδειξη: Αν η εταιρεία παρασκευάσει ποσότητα β τότε θα εισπράξει συνολικά, στο τέλος του έτους, ποσό ίσο με $60X$ αν $X \le \beta$ και 60β αν $X > \beta$, δηλαδή $60 \min\{X, \beta\}$.]

Θέμα 4. Έστω $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με κατανομή Γάμμα, μέση τιμή 3 και διασπορά 2. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_k = \frac{1}{k}Y + Y_k$, $k = 1, 2, \ldots$

(α) Είναι οι X_k ανεξάρτητες; Αποδείξτε ότι η X_1 ακολουθεί κατανομή Γάμμα, προσδιορίστε τις παραμέτρους της και γράψτε την πυκνότητά της αναλυτικά.

(β) Να αποδείξετε ότι, καθώς $\nu \to +\infty$, η ακολουθία

$$\overline{X}_\nu = \frac{1}{\nu}(X_1 + \ldots + X_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

συγκλίνει στοχαστικά (δηλ. κατά πιθανότητα) σε κάποια σταθερά c, την οποία και να προσδιορίσετε.
[Υπόδειξη: Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της $\overline{X}_\nu$. Θεωρήστε γνωστό το όριο $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} = 0$.]

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!