

Σύντομες Απαντήσεις.

Θ1. Θέτουμε $Y =$ ένδειξη ζαριού, $X =$ πλήθος «Κ», $A = \{\text{το νόμισμα έφερε «Κ» σε όλες τις δοκιμές}\}$.

(α). Προφανώς ισχύει $P(Y = \nu) = \frac{1}{6}$, $P(A|Y = \nu) = P(X = \nu|Y = \nu) = (\frac{1}{2})^\nu$, οπότε από το Θ.Ο.Π., $P(A) = \sum_{\nu=1}^6 P(A|Y = \nu)P(Y = \nu) = \frac{1}{6} \sum_{\nu=1}^6 (\frac{1}{2})^\nu = \frac{63}{384} = \frac{21}{128} = 0.1640625$.

(β) Από τον τύπο Bayes και το (α), $P(Y = 2|A) = \frac{P(A|Y=2)P(Y=2)}{P(A)} = \frac{(1/2)^2(1/6)}{21/128} = \frac{16}{63} \simeq 0.254$.

(γ) Η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου $\{Y = \nu\}$ είναι Διωνυμική($\nu, \frac{1}{2}$). Επομένως, $E(X|Y = \nu) = \frac{\nu}{2}$, $E(X|Y) = \frac{1}{2}Y$. Αφού $E(Y) = \frac{7}{2}$, προκύπτει ότι

$$E(X) = E\{E(X|Y)\} = E(\frac{1}{2}Y) = \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4} = 1.75.$$

Θ2. Η συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(α) Η X παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 2)$ οπότε η $|X - 1|$ παίρνει τιμές στο $[0, 1)$. Προφανώς $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X - 1| \leq y) = 0$ όταν $y < 0$. Για $y \geq 0$ έχουμε $|X - 1| \leq y \iff 1 - y \leq X \leq 1 + y$. Επομένως, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X - 1| \leq y) = P(1 - y \leq X \leq 1 + y) = P(X \leq 1 + y) - P(X < 1 - y) = F(1 + y) - F((1 - y)-) = F(1 + y) - F(1 - y)$ (η τελευταία ισότητα επειδή η συγκεκριμένη F είναι συνεχής). Για την συγκεκριμένη F και για τυχόν $y \geq 0$ έχουμε

$$F(1 + y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + y)^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y \geq 1, \end{cases} \quad F(1 - y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - y)^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & y \geq 1. \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$F_Y(y) = F(1 + y) - F(1 - y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{4}(1 + y)^2 - \frac{1}{4}(1 - y)^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1 - 0, & y \geq 1, \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y \geq 1, \end{cases}$$

που είναι η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης στο διάστημα $(0, 1)$, δηλ. $Y \sim U(0, 1)$.

(β) $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$ [Η παράγωγος δεν υπάρχει όταν $y = 0$ ή 1 , οπότε ορίζουμε αυθαίρετα την πυκνότητα στα δύο αυτά σημεία.]

(γ) Υπολογίζουμε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = 2,$$

οπότε $Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{2}{9}$. Επίσης, $E(Y) = \frac{1}{2}$, $Var(Y) = \frac{1}{12}$, επειδή $Y \sim U(0, 1)$. Τέλος,

$$E\{XY\} = E\{X \cdot |X - 1|\} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2|x - 1|dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1 - x)dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2(x - 1)dx = \frac{3}{4},$$

οπότε $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{4} - (\frac{4}{3})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$. Τελικά,

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{1}{12}}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \simeq 0.612.$$

Θ3. Έστω β η ποσότητα που παρασκευάζει η εταιρεία. Αυτή η ποσότητα κοστίζει 40β ενώ η συνολική είσπραξη στο τέλος του έτους είναι $50 \min\{X, \beta\}$. Συνεπώς, το κέρδος Y ισούται με $Y = 50 \min\{X, \beta\} - 40\beta$ και το αναμενόμενο (= μέσο) κέρδος είναι

$$E(Y) = E(50 \min\{X, \beta\} - 40\beta) = 50E(\min\{X, \beta\}) - 40\beta.$$

Από τον τύπο «αφηρημένου μαθηματικού» έχουμε

$$E(\min\{X, \beta\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x, \beta\} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \min\{x, \beta\} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\beta} x dx + \frac{1}{2} \int_{\beta}^2 \beta dx = \beta - \frac{\beta^2}{4}$$

και συνεπώς, $E(Y) = 50(\beta - \frac{\beta^2}{4}) - 40\beta = 10\beta - \frac{25}{2}\beta^2 = h(\beta)$. Ελέγχοντας το πρόσημο της παραγώγου, $h'(\beta) = 10 - 25\beta$, βρίσκουμε την ποσότητα η οποία μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος, $h(\beta)$:

$$\beta = \beta^* = \frac{2}{5} = 0.4.$$

[Η συγκεκριμένη ποσότητα είναι αρκετά μικρότερη της μέσης ζήτησης, $E(X) = 1$.]

Θ4. Αφού $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ και $\mu = \frac{\alpha}{\lambda} = 2$, $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} = 3$, βρίσκουμε $\alpha = \frac{4}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$.

(α) Για $k \neq j$ έχουμε $Cov(X_k, X_j) = Cov(\frac{1}{k}Y + Y_k, \frac{1}{j}Y + Y_j) = \frac{3}{k \cdot j} > 0$ επειδή $Cov(Y, Y) = Var(Y) = 3$ ενώ $Cov(Y, Y_j) = Cov(Y_k, Y) = Cov(Y_k, Y_j) = 0$, διότι οι Y, Y_k, Y_j είναι εζ' υποθέσεως ανεξάρτητες - άρα, και ασυσχέτιστες (διότι έχουν πεπερασμένη διασπορά). Επομένως, οι X_k, X_j είναι εξαρτημένες, διότι αν ήταν ανεξάρτητες θα ήταν και ασυσχέτιστες.

Η $X_1 = Y + Y_1$ είναι άθροισμα των ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών Y, Y_1 , οι οποίες ακολουθούν κατανομή Γάμμα με κοινή δεύτερη παράμετρο (και πρώτη). Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτριά τους δίνεται από τον τύπο

$$M_Y(t) = M_{Y_1}(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}, \quad t < \lambda,$$

που είναι πεπερασμένη σε μία περιοχή του μηδενός. Από την ανεξαρτησία των e^{tY}, e^{tY_1} προκύπτει ότι $M_{X_1}(t) = E(e^{t(Y+Y_1)}) = E(e^{tY} e^{tY_1}) = E(e^{tY})E(e^{tY_1}) = M_Y(t)M_{Y_1}(t) = (1 - t/\lambda)^{-2\alpha}$, $t < \lambda$. Αυτή είναι η ροπογεννήτρια της κατανομής $\Gamma(2\alpha, \lambda)$. Άρα $X_1 \sim \Gamma(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$, με πυκνότητα

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{(\frac{2}{3})^{\frac{8}{3}}}{\Gamma(\frac{8}{3})} x_1^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{2}{3}x_1}, \quad x_1 > 0.$$

(β) Στο (α) υπολογίσαμε $Cov(X_k, X_j) = \frac{3}{k \cdot j}$, $k \neq j$. Επίσης, $Var(X_k) = Var(\frac{1}{k}Y + Y_k) = Var(\frac{1}{k}Y) + Var(Y_k) = (\frac{1}{k})^2 Var(Y) + Var(Y_k) = 3(\frac{1}{k^2} + 1)$, όπου η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από την ανεξαρτησία των Y, Y_k . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{k=1}^{\nu} X_k\right) &= \sum_{k=1}^{\nu} 3\left(\frac{1}{k^2} + 1\right) + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j \neq k} \frac{3}{k \cdot j} = 3\nu + 3 \left(\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j \neq k} \frac{1}{k \cdot j} \right) \\ &= 3\nu + 3 \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{k \cdot j} = 3\nu + 3 \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{j} = 3\nu + 3 \left(\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} \right)^2. \end{aligned}$$

Έχουμε τελικά

$$\sigma_{\nu}^2 = Var(\bar{X}_{\nu}) = Var\left(\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} X_k\right) = \frac{1}{\nu^2} Var\left(\sum_{k=1}^{\nu} X_k\right) = \frac{3}{\nu} + 3 \left(\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} \right)^2.$$

Επίσης, από την γραμμικότητα της μέσης τιμής, $E(X_k) = E(\frac{1}{k}Y + Y_k) = \frac{1}{k}E(Y) + E(Y_k) = 2 + \frac{2}{k}$ και

$$\mu_\nu = E(\bar{X}_\nu) = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} E(X_k) = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \left\{ 2 + \frac{2}{k} \right\} = \frac{1}{\nu}(2\nu) + \frac{2}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} = 2 + 2 \left(\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} \right).$$

Από τις πιο πάνω εκφράσεις έπεται ότι $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_\nu = 2$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu^2 = 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Από την ανισότητα Markov [$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$, $X \geq 0$, $\alpha > 0$] εφαρμοζόμενη στην (μη αρνητική) τυχαία μεταβλητή $X = (\bar{X}_\nu - 2)^2$ και για $\alpha = \epsilon^2 > 0$, έχουμε

$$0 \leq P(|\bar{X}_\nu - 2| \geq \epsilon) = P\{(\bar{X}_\nu - 2)^2 \geq \epsilon^2\} \leq \frac{E\{(\bar{X}_\nu - 2)^2\}}{\epsilon^2}.$$

Γράφοντας $(\bar{X}_\nu - 2)^2 = [(\bar{X}_\nu - \mu_\nu) + (\mu_\nu - 2)]^2 = (\bar{X}_\nu - \mu_\nu)^2 + (\mu_\nu - 2)^2 + 2(\mu_\nu - 2)(\bar{X}_\nu - \mu_\nu)$ έχουμε

$$E\{(\bar{X}_\nu - 2)^2\} = E\{(\bar{X}_\nu - \mu_\nu)^2\} + (\mu_\nu - 2)^2 + 2(\mu_\nu - 2)E(\bar{X}_\nu - \mu_\nu) = \sigma_\nu^2 + (\mu_\nu - 2)^2,$$

επειδή $\mu_\nu = E(\bar{X}_\nu)$, οπότε ο πρώτος όρος ισούται με την διασπορά, σ_ν^2 , της \bar{X}_ν και $E(\bar{X}_\nu - \mu_\nu) = E(\bar{X}_\nu) - \mu_\nu = \mu_\nu - \mu_\nu = 0$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε

$$0 \leq P(|\bar{X}_\nu - 2| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_\nu^2 + (\mu_\nu - 2)^2}{\epsilon^2} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

επειδή $\mu_\nu \rightarrow 2$, $\sigma_\nu^2 \rightarrow 0$ και το $\epsilon > 0$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του ν). Άρα

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_\nu - 2| \geq \epsilon) = 0.$$

Αφού το $\epsilon > 0$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρό, έπεται από τον ορισμό της στοχαστικής σύγκλισης (ή σύγκλισης κατά πιθανότητα) ότι η ακολουθία \bar{X}_ν συγκλίνει στοχαστικά στη σταθερά $c = 2$.