

**Θέμα 1.** Ρίχνουμε πρώτα ένα συνηθισμένο ζάρι και στη συνέχεια, παρατηρώντας την ένδειξη  $Y = \nu$ ,  $\nu \in \{1, 2, \dots, 6\}$ , του ζαριού, ρίχνουμε ένα συνηθισμένο νόμισμα  $\nu$  ανεξάρτητες φορές. Έστω  $X$  η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το πλήθος φορών που το νόμισμα έφερε «Κ». Να βρεθούν:

- (α) η πιθανότητα το νόμισμα να εμφανίσει «Κ» σε όλες τις ρίψεις.
- (β) η (δεσμευμένη) πιθανότητα το ζάρι να είχε φέρει την ένδειξη 2 αν είναι γνωστό ότι το νόμισμα εμφάνισε «Κ» σε όλες τις ρίψεις.
- (γ) η μέση τιμή (ο αναμενόμενος αριθμός) του πλήθους εμφανίσεων «Κ».

**Θέμα 2.** Η  $X$  είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $Y = |X - 1|$ . Υπολογίστε:

- (α) την συνάρτηση κατανομής της  $Y$ ,  $F_Y(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .
- (β) την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$ ,  $f_Y(y)$ .
- (γ) τον συντελεστή συσχέτισης  $\rho$  των  $X$  και  $Y$ .

**Θέμα 3.** Η ζήτηση  $X$  ενός φαρμάκου κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(0, 2)$ . Η φαρμακευτική εταιρεία θέλει να παρασκευάσει στην αρχή του έτους ποσότητα  $\beta \in (0, 2)$  του φαρμάκου. Διευκρινίζεται ότι η εταιρεία θα παρασκευάσει όλη την ποσότητα του φαρμάκου στην αρχή του έτους, τότε που δεν γνωρίζει την μελλοντική ζήτηση  $X$ . Η παρασκευή της ποσότητας  $\beta$  έχει κόστος παραγωγής  $40\beta$  (το κόστος ανά μονάδα παραγωγής είναι 40), ενώ η τιμή πώλησης ανά μονάδα είναι 50. Να προσδιοριστεί η τιμή  $\beta^*$  που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας.

[Υπόδειξη: Αν η εταιρεία παρασκευάσει ποσότητα  $\beta$  τότε θα εισπράξει συνολικά, στο τέλος του έτους, ποσό ίσο με  $50X$  αν  $X \leq \beta$  και  $50\beta$  αν  $X > \beta$ , δηλαδή  $50 \min\{X, \beta\}$ .]

**Θέμα 4.** Έστω  $Y, Y_1, Y_2, \dots$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με κατανομή Γάμμα, μέση τιμή 2 και διασπορά 3. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές  $X_k = \frac{1}{k}Y + Y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

- (α) Είναι οι  $X_k$  ανεξάρτητες; Αποδείξτε ότι η  $X_1$  ακολουθεί κατανομή Γάμμα, προσδιορίστε τις παραμέτρους της και γράψτε την πυκνότητά της αναλυτικά.
- (β) Να αποδείξετε ότι, καθώς  $\nu \rightarrow +\infty$ , η ακολουθία

$$\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}(X_1 + \dots + X_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

συγκλίνει στοχαστικά (δηλ. κατά πιθανότητα) σε κάποια σταθερά  $c$ , την οποία και να προσδιορίσετε.

[Υπόδειξη: Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της  $\bar{X}_\nu$ . Θεωρήστε γνωστό το όριο  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} = 0$ .]

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΣΕ 2½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!