

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

Θέμα 1.(20 Βαθμοί) Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα, πλην όμως, το ένα φέρνει «K» με πιθανότητα $p_1 = 1/2$ (δίκαιο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 1/5$ (κίβδηλο). Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές.

(α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε και τις δύο φορές «K»;

(β) Αν και στις δύο δοκιμές έχει εμφανιστεί «K», ποια είναι η πιθανότητα να είχαμε διαλέξει το κίβδηλο νόμισμα;

Θέμα 2.(20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n διαδοχικές φορές, $n \geq 3$. Να βρεθούν:

(α) Η πιθανότητα να μην εμφανιστούν δύο ίδιες διαδοχικές ενδείξεις.

(β) Η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι τρεις ενδείξεις «1», «3» και «5» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία.

(γ) Η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη «6» (τουλάχιστον μία φορά).

Θέμα 3.(30 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1, 4)$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y = 1/\sqrt{X}$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή και η διασπορά της Y .

(β) Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y .

(γ) Η συνδιακύμανση, $C(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)$, των X και Y , καθώς και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X + Y = X + 1/\sqrt{X}$.

Θέμα 4.(30 Βαθμοί) (α) Έστω $\kappa \in \{0, 1, \dots\}$ και $\lambda > 0$. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P_X(u) = E(u^X)$ της (διακριτής) τυχαίας μεταβλητής X με σύνολο τιμών $R_X = \{\kappa, \kappa + 1, \kappa + 2, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-\kappa}}{(x-\kappa)!}, \quad x = \kappa, \kappa + 1, \kappa + 2, \dots$$

(β) Χρησιμοποιώντας την πιθανογεννήτρια που βρήκατε στο Ερώτημα (α), να προσδιορίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας της $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, όταν οι X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με συνάρτηση πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α).

Θέμα 5.(20 Βαθμοί) (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } 1 < x \leq 2, \\ 3-x & \text{αν } 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{αν } x \notin (1, 3). \end{cases}$$

[**Σημείωση:** Για να διευκολυνθείτε στις πράξεις, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, χωρίς απόδειξη, το γεγονός ότι η παραπάνω τυχαία μεταβλητή X έχει την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή $1+U+V$, όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες, καθεμία με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.]

(β) Να βρείτε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως το άθροισμα 216 ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α), δεν υπερβαίνει τον αριθμό 423.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \Phi(0.5) &= 0.6915, & \Phi(1) &= 0.8413, & \Phi(1.5) &= 0.9332, \\ \Phi(2) &= 0.9773, & \Phi(2.5) &= 0.9938, & \Phi(3) &= 0.9987 \end{aligned}$$

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!