B

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

Θέμα 1.(20 Βαθμοί) Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα, πλην όμως, το ένα φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_1 = 1/2$ (δίκαιο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 1/5$ (κίβδηλο). Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές.

(α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε και τις δύο φορές «Κ»;

(β) Αν και στις δύο δοκιμές έχει εμφανιστεί «Κ», ποια είναι η πιθανότητα να είχαμε διαλέξει το κίβδηλο νόμισμα;

Θέμα 2.(20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n διαδοχικές φορές, $n \geq 3$. Να βρεθούν:

(α) Η πιθανότητα να μην εμφανιστούν δύο ίδιες διαδοχικές ενδείξεις.

(β) Η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι τρεις ενδείξεις «1», «3» και «5» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία.

(γ) Η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη «6» (τουλάχιστον μία φορά).

Θέμα 3.(30 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1, 4)$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y = 1/\sqrt{X}$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή και η διασπορά της Y.

(β) Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

(γ) Η συνδιακύμανση, $\mathrm{C}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$, των X και Y, καθώς και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X + Y = X + 1/\sqrt{X}$.

Θέμα 4.(30 Βαθμοί) (α) Έστω $\kappa \in \{0, 1, \ldots\}$ και $\lambda > 0$. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P_X(u) = \mathrm{E}(u^X)$ της (διακριτής) τυχαίας μεταβλητής X με σύνολο τιμών $R_X = \{\kappa, \kappa + 1, \kappa + 2, \ldots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x-\kappa}}{(x-\kappa)!}, \quad x = \kappa, \kappa+1, \kappa+2, \ldots .$$

(β) Χρησιμοποιώντας την πιθανογεννήτρια που βρήκατε στο Ερώτημα (α), να προσδιορίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας της $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, όταν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με συνάρτηση πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α).

Θέμα 5.(20 Βαθμοί) (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } 1 < x \leq 2, \\ 3-x & \text{αν } 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{αν } x \notin (1,3). \end{cases}$$

[**Σημείωση:** Για να διευκολυνθείτε στις πράξεις, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, χωρίς απόδειξη, το γεγονός ότι η παραπάνω τυχαία μεταβλητή X έχει την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή $1+U+V$, όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες, καθεμία με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.]

(β) Να βρείτε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως το άθροισμα 216 ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α), δεν υπερβαίνει τον αριθμό 423.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0, 1)$**:**

$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$,
$\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(2.5) = 0.9938$, $\Phi(3) = 0.9987$

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1 (α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{επιλέγω το δίκαιο νόμισμα}\}, \\ A_2 &:= \{\text{επιλέγω το κίβδηλο νόμισμα}\}, \\ B &:= \{\text{οι δύο ρίψεις φέρνουν «K»}\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{29}{200}.$$

(β) [Το ερώτημα αυτό είναι τυπική εφαρμογή του τύπου του Bayes.] Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α).

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{1/50}{29/200} = \frac{4}{29}.$$

Θέμα 2 (α)

$$P(\text{δεν υπάρχουν ίδιες διαδοχικές ενδείξεις}) = \frac{6 \times 5^{n-1}}{6^n}.$$

Γιατί οι ευνοϊκές επιλογές για την πρώτη ρίψη είναι 6, ενώ για καθεμία από τις επόμενες είναι 5, επειδή καθεμία πρέπει να είναι διαφορετική απο την προηγούμενη της.

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_i := \{\text{δεν εμφανίζεται η ένδειξη «}2i-1\text{»}\}$ με $i = 1, 2, 3$, περνάμε στα συμπληρωματικά ενδεχόμενα, και εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

$$\begin{aligned} P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') &= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{3} P(A_i) + \sum_{1 \le i < j \le 3} P(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le 3} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &= 1 - 3P(A_1) + 3P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^n + 3\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

(γ)

$$P(\text{εμφανίζεται το «6» τουλάχιστον μία φορά}) = 1 - P(\text{δεν εμφανίζεται το «6»}) = 1 - \frac{5^n}{6^n}.$$

Θέμα 3 (α) Η πυκνότητα της X είναι $f(x) = (1/3)\mathbf{1}_{x \in (1,4)}$. Άρα

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}, \\ E(Y^2) &= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = \frac{2}{3}\log 2, \end{aligned}$$

και $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = (2/3)\log 2 - (2/3)^2$.

(β) Για $y \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση κατανομής είναι $F_Y(y) = P(1/\sqrt{X} \le y)$ που προφανώς ισούται με 0 για $y \le 1/2$, και με 1 για $y \ge 1$ γιατί $P(Y \in (1/2, 1)) = P(1/\sqrt{X} \in (1/2, 1)) = P(\sqrt{X} \in (1, 2)) = P(X \in (1, 4)) = 1$. Για $y \in (1/2, 1)$ έχουμε $1/y^2 \in (1, 4)$, και άρα

$$F_Y(y) = P(1/\sqrt{X} \le y) = P(X \ge 1/y^2) = \frac{1}{3}(4 - y^{-2}).$$

Η F_Y είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{1/2,1\}$ με συνεχή παράγωγο εκεί. Έπεται με παραγώγιση απο τα πιο πάνω ότι μια πυκνότητα για την κατανομή της Y είναι η $f_Y(y) = (2/3)y^{-3}\mathbf{1}_{y\in(1/2,1)}$.

(γ) $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(\sqrt{X}) - (5/2)(2/3) = (14/9) - 5/3 = -1/9$. Και

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2C(X,Y) \\ &= \frac{(4-1)^2}{12} + (2/3)\log 2 - (2/3)^2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{12} + \frac{2}{3}\log 2. \end{aligned}$$

Θέμα 4 (α) Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P_X(u) = E(u^X) = \sum_{x=\kappa}^{\infty} u^x e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x-\kappa}}{(x-\kappa)!} \overset{x-\kappa=j}{=} e^{-\lambda}u^\kappa \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda u)^j}{j!} = u^\kappa e^{\lambda(u-1)}.$$

Η πιθανογεννήτρια αυτή είναι πεπερασμένη για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

(β) Επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και, λόγω ισονομίας, έχουν την ίδια πιθανογεννήτρια $P_{X_i}(u) = u^\kappa e^{\lambda(u-1)}$, έπεται ότι η πιθανογεννήτρια του αθροίσματός τους ισούται με

$$P_Y(u) = P_{X_1}(u)P_{X_2}(u)\cdots P_{X_n}(u) = (P_{X_1}(u))^n = (u^\kappa e^{\lambda(u-1)})^n = u^{n\kappa}e^{n\lambda(u-1)}.$$

Επίσης, η κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας όπως στο (α) με παραμέτρους $n\kappa, n\lambda$ αντί των κ, λ έχει ακριβώς την ίδια πιθανογεννήτρια. Έπεται ότι η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι η

$$f_Y(y) = P(Y = y) = e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^{y-n\kappa}}{(y-n\kappa)!}, \quad y = n\kappa, n\kappa+1, n\kappa+2, \dots\ .$$

Θέμα 5 (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = 1 + U + V$ όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Άρα $E(X) = E(1+U) + E(V) = 1 + E(U) + E(V) = 1 + 1/2 + 1/2 = 2$, και λόγω ανεξαρτησίας έχουμε $V(X) = V(1+U) + V(V) = V(U) + V(V) = 1/12 + 1/12 = 1/6$.

(β) Έστω $(X_i)_{i\ge 1}$ ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή που έχει πυκνότητα όπως στο (α). Για κάθε $n \ge 1$, θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Επειδή $E(X_1) = 2$ και $V(X_1) = 1/6 < \infty$, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δίνει ότι για μεγάλο n, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n/6}}$$

προσεγγίζεται από την κατανομή της τυποποιημένης κανονικής, $N(0,1)$. Άρα

$$P(S_{216} \le 423) = P\left(\frac{S_{216} - 432}{\sqrt{216/6}} \le -\frac{9}{6}\right) \approx \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668.$$