A

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

Θέμα 1.(20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n διαδοχικές φορές, $n \geq 3$. Να βρεθούν:

(α) Η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη «1» (τουλάχιστον μία φορά).

(β) Η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ίδιες διαδοχικές ενδείξεις.

(γ) Η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι τρεις ενδείξεις «1», «2» και «3» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία.

Θέμα 2.(20 Βαθμοί) Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα, πλην όμως, το ένα φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_1 = 3/4$ (κίβδηλο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 1/2$ (δίκαιο). Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη, και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές.

(α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε και τις δύο φορές «Κ»;

(β) Αν και στις δύο δοκιμές έχει εμφανιστεί «Κ», ποια είναι η πιθανότητα να είχαμε διαλέξει το δίκαιο νόμισμα;

Θέμα 3.(30 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1,2)$. Θέτουμε $Y = 1/X$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή και η διασπορά της Y.

(β) Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

(γ) Η συνδιακύμανση, $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)$, των X και Y, και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X + Y = X + 1/X$.

Θέμα 4.(30 Βαθμοί) (α) Έστω $\rho \geq 0$ και $a > 0$. Να υπολογίσετε τη ροπογεννήτρια $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$ της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}(x-\rho)^{a-1}e^{-(x-\rho)}, \quad x > \rho.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια που βρήκατε στο Ερώτημα (α), να προσδιορίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, όταν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α).

Θέμα 5.(20 Βαθμοί) (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 < x \leq 1, \\ 2-x & \text{αν } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{αν } x \notin (0,2). \end{cases}$$

[**Σημείωση:** Για να διευκολυνθείτε στις πράξεις, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, χωρίς απόδειξη, το γεγονός ότι η παραπάνω τυχαία μεταβλητή X έχει την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή $U+V$, όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες, καθεμία με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.]

(β) Να βρείτε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως το άθροισμα 150 ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α), δεν υπερβαίνει τον αριθμό 145.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0,1)$**:**

$$\Phi(0.5) = 0.6915, \quad \Phi(1) = 0.8413, \quad \Phi(1.5) = 0.9332,$$
$$\Phi(2) = 0.9773, \quad \Phi(2.5) = 0.9938, \quad \Phi(3) = 0.9987$$

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!