

## ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2001

**Θέμα 1.** Το τυχαίο διάνυσμα  $(X, Y, Z)$  έχει από κοινού πυκνότητα

$$f(x, y, z) = cxy^2z^3, \quad \text{για } x, y, z \in (0, 1).$$

Υπολογίστε (α) την σταθερά  $c$ , (β) την πιθανότητα όπως τουλάχιστον μία από τις  $X, Y, Z$  είναι μεγαλύτερη του  $1/2$ , και (γ) την πιθανότητα όπως ακριβώς μία από τις  $X, Y, Z$  είναι μεγαλύτερη του  $1/2$ .

**Θέμα 2.** Έστω  $X$  και  $Y$  δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα

$$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}, \quad t > 0.$$

Θέτουμε  $Z = (X - Y)/2$  και  $W = (X + Y)/2$ . Να προσδιοριστούν (α) η από κοινού πυκνότητα των  $Z$  και  $W$ , (β) η δεσμευμένη πυκνότητα της  $Z$  δεδομένου ότι  $W = w$ , και (γ) να βρεθεί για ποια συνάρτηση  $g(W)$  ελαχιστοποιείται η ποσότητα

$$\mathbb{E}(Z - g(W))^2.$$

**Θέμα 3.** Η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή  $(X, Y)$  έχει συνάρτηση πιθανότητας  $f(x, y)$ ,  $x, y \in \{0, 1, 2\}$ , οι τιμές της οποίας δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$x \backslash y$	0	1	2
0	1/4	0	0
1	0	1/2	0
2	1/12	1/12	1/12

Υπολογίστε (α) τη συνάρτηση πιθανότητας της διαφοράς  $Z = X - Y$ , (β) τη συνάρτηση πιθανότητας του γινομένου  $W = XY$ , και (γ) τη συνδιακύμανση των  $X$  και  $Y$ .

Επίσης εξετάστε αν οι  $X$  και  $Y$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

**Θέμα 4.** (α) Έστω  $(X_1, X_2, \dots, X_\nu)$  ένα τυχαίο διάνυσμα με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_\nu = x_\nu] = \frac{\nu!}{x_1!x_2! \cdots x_\nu!(\nu - x_1 - x_2 - \cdots - x_\nu)!} \left(\frac{1}{\nu + 1}\right)^\nu,$$

για  $x_1, x_2, \dots, x_\nu \in \{0, 1, \dots\}$  με  $x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu \leq \nu$ . Θέτουμε  $\bar{X}_\nu = (X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu)/\nu$ . Δείξτε ότι

$$\bar{X}_\nu \rightarrow 1 \quad \text{κατά πιθανότητα καθώς } \nu \rightarrow \infty.$$

(β) Υπολογίστε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως σε 100 ανεξάρτητες ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος εμφανιστούν το πολύ 40 επιτυχίες.

$$[\Phi(1) = 0.841, \Phi(1.5) = 0.933, \Phi(2) = 0.977].$$

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΣΕ 2½ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**