ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 2003

Θέμα 1. Σε ένα σχολείο με 300 παιδιά, 180 αγόρια και 120 κορίτσια, θα εκλεγούν στην τύχη 15 άτομα, τα οποία θα αποτελέσουν το 15μελές.
(α) Υπολογίστε την Πιθανότητα να εκλεγούν κ κορίτσια, για $\kappa = 0, 1, \ldots, 15$.
(β) Ποια η πιθανότητα να εκλεγούν τουλάχιστον 12 αγόρια;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγούν στο 15μελές ταυτόχρονα ο καλύτερος μαθητής και η καλύτερη μαθήτρια του σχολείου;

Θέμα 2. Θεωρούμε ένα σύνολο με $\nu + \kappa$ στοιχεία, όπου $\nu \geq 1$ και $\kappa \geq 1$, π.χ. το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu + \kappa\}$. Επίσης θεωρούμε όλες τις 'λέξεις' με $\nu + \kappa$ σύμβολα A και B, οι οποίες αποτελούνται από ν σύμβολα A και κ σύμβολα B.
(α) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς κ στοιχεία;
(β) Περιγράψτε μια ένα προς ένα και επί (αμφιμονοσήμαντη) αντιστοιχία μεταξύ των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς κ στοιχεία και των 'λέξεων' με $\nu + \kappa$ σύμβολα A και B, εκ των οποίων τα ν είναι A και τα υπόλοιπα κ είναι B.
(γ) Αν διαλέξουμε μια από τις παραπάνω 'λέξεις' στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να μην περιέχει σύμβολο B μεταξύ δυο οποιωνδήποτε συμβόλων A;
(δ) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των πρώτων ν φυσικών αριθμών διαιρεί οποιοδήποτε γινόμενο αποτελούμενο από τουλάχιστον ν διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, δηλαδή ότι το $\nu!$ διαιρεί το $(\kappa + 1)(\kappa + 2) \cdots (\kappa + s)$, για οποιουσδήποτε φυσικούς $\kappa \geq 0$ και $s \geq \nu$.

Θέμα 3. Διαθέτουμε ένα συμμετρικό νόμισμα και ένα συμμετρικό ζάρι, και εκτελούμε το εξής τυχαίο πείραμα: Ρίχνουμε πρώτα το ζάρι, και στη συνέχεια, 'στρίβουμε' κ φορές το νόμισμα, όπου $\kappa \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ ο αριθμός που έφερε το ζάρι.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε περιττό αριθμό κεφαλών;
(β) Δεδομένου ότι φέραμε περιττό αριθμό κεφαλών, ποια η πιθανότητα να είχε εμφανίσει το ζάρι την ένδειξη 3;

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 1 ΩΡΑ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!