ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ (ΕΣΙ)
ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 24/2/2007

Λύσεις

Θέμα 1

Για $k, j = 1,2,\ldots,6$, ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A_k = \{$όλες οι ζαριές έφεραν ένδειξη $\le k\}$ και $B_j = \{$όλες οι ζαριές έφεραν ένδειξη $\ge j\}$, οπότε $P(A_k) = (k/6)^{10}$ και $P(B_j) = (1-(j-1)/6)^{10}$. Επίσης, ισχύει ότι $P(A_k \cap B_j) = ((k-j+1)/6)^{10}$, όταν $1 \le j \le k \le 6$.

(α) Αφού $A_4 \subseteq A_5$, οπότε $A_4 \cap A_5 = A_4$, έχουμε:

$P($ η μεγαλύτερη ένδειξη ισούται με 5$)$
$= P(A_5 - A_4) = P(A_5) - P(A_4 \cap A_5) = P(A_5) - P(A_4) = (5/6)^{10} - (4/6)^{10}$.

(β) Ομοίως, αφού $B_2 \subseteq B_1$, οπότε $B_1 \cap B_2 = B_2$, έχουμε:

$P($ η μικρότερη ένδειξη ισούται με 1$)$
$= P(B_1 - B_2) = P(B_1) - P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) - P(B_2) = 1-(5/6)^{10}$.

(γ) Εδώ ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $C = A \cap B$, όπου $A = A_5 - A_4$, $B = B_1 - B_2$. Παρατηρούμε ότι

$$C = (A_5 \cap A_4') \cap (B_1 \cap B_2') = (A_5 \cap B_1) \cap (A_4 \cup B_2)' = (A_5 \cap B_1) - (A_4 \cup B_2),$$

και

$$\begin{aligned}(A_5 \cap B_1) \cap (A_4 \cup B_2) &= (A_4 \cap A_5 \cap B_1) \cup (A_5 \cap B_1 \cap B_2)\\ &= (A_4 \cap B_1) \cup (A_5 \cap B_2),\end{aligned}$$

επειδή $A_4 \subseteq A_5$ και $B_2 \subseteq B_1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}P(C) &= P(A_5 \cap B_1) - P((A_5 \cap B_1) \cap (A_4 \cup B_2))\\ &= P(A_5 \cap B_1) - P((A_4 \cap B_1) \cup (A_5 \cap B_2))\\ &= P(A_5 \cap B_1) - P(A_4 \cap B_1) - P(A_5 \cap B_2) + P(A_4 \cap B_1 \cap A_5 \cap B_2)\\ &= P(A_5 \cap B_1) - P(A_4 \cap B_1) - P(A_5 \cap B_2) + P(A_4 \cap B_2)\\ &= (5/6)^{10} - 2\cdot(4/6)^{10} + (3/6)^{10}.\end{aligned}$$

Θέμα 2

Ο παίκτης **α** φέρνει άθροισμα 9 με τις ζαριές $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ και $(6,3)$, δηλ. με πιθανότητα $4/36 = 1/9$. Για τον παίκτη **β** οι ευνοϊκές ζαριές είναι οι $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$ και $(6,2)$, δηλ. έχει πιθανότητα $5/36$ να φέρει άθροισμα 8.

Για $k = 1,2,\ldots$ ορίζουμε τα ενδεχόμενα: $A_{2k-1} = \{$ο **α** κερδίζει στην $2k-1$ δοκιμή$\}$, και $B_{2k} = \{$ο **β** κερδίζει στην $2k$ δοκιμή$\}$. Προφανώς, αν A είναι το ενδεχόμενο να κερδίσει τελικά ο **α** και B το ενδεχόμενο να κερδίσει τελικά ο **β**, τότε

$$A = A_1 \cup A_3 \cup \cdots \quad \text{και} \quad B = B_2 \cup B_4 \cup \cdots,$$

όπου τα $A_1, B_2, A_3, B_4, \ldots$ είναι ξένα (ασυμβίβαστα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα. Όμως,

$$P(A_{2k-1}) = \left(\frac{32}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{31}{36}\right)^{k-1}\frac{4}{36}, \quad P(B_{2k}) = \left(\frac{32}{36}\right)^{k}\left(\frac{31}{36}\right)^{k-1}\frac{5}{36}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

και τελικά,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{32}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{31}{36}\right)^{k-1}\frac{4}{36}\right] = \frac{4}{36}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{32\cdot 31}{36\cdot 36}\right)^{k-1} = \frac{4}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{31\cdot 32}{36^2}} = \frac{9}{19},$$

και

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{32}{36}\right)^{k}\left(\frac{31}{36}\right)^{k-1}\frac{5}{36}\right] = \frac{5}{36}\cdot\frac{32}{36}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{32\cdot 31}{36\cdot 36}\right)^{k-1} = \frac{10}{9}\cdot P(A) = \frac{10}{19}.$$

[**Σημείωση:** Αν και ο **α** παίζει πρώτος, έχει τελικά μικρότερη πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι, απ' ότι ο **β,** και αυτό φυσικά οφείλεται στο γεγονός ότι είναι αρκετά πιο πιθανό το άθροισμα 8 απ' ότι το άθροισμα 9. Αφού $P(A) + P(B) = 1$, συμπεραίνουμε ότι το συγκεκριμένο παιχνίδι θα τερματιστεί σίγουρα σε πεπερασμένο αριθμό δοκιμών, πράγμα το οποίο δεν είναι εντελώς προφανές, επειδή το ενδεχόμενο $C = \{$το παιχνίδι συνεχίζεται επ' άπειρον$\}$ δεν είναι κενό, διότι περιέχει π.χ. την ακολουθία δοκιμών $(1,4),(1,4),(1,4),\ldots$, καθώς και άπειρες ακόμη ακολουθίες, οι οποίες δεν οδηγούν ούτε σε νίκη του **α** ούτε του **β**. Πλην όμως, όλες μαζί αυτές οι ακολουθίες έχουν πιθανότητα 0 να εμφανιστούν, όπως αποδεικνύει ο προηγούμενος υπολογισμός.]

Θέμα 3

Ορίζουμε το ενδεχόμενο $A = \{$ο παίκτης διαλέγει το νόμισμα **α**$\}$, οπότε $A' = \{$ο παίκτης διαλέγει το νόμισμα **β**$\}$**,** και $P(A) = P(A') = 1/2$. Αν θέσουμε $B = \{$ο παίκτης φέρνει τουλάχιστον μία φορά Κ στις δύο δοκιμές$\}$, τότε

$$P(B \mid A) = 1 - P(\text{το νόμισμα } \mathbf{α} \text{ φέρνει Γ και στις δύο δοκιμές}) = 1 - (1-p)^2,$$

και

$$P(B \mid A') = 1 - P(\text{το νόμισμα } \mathbf{β} \text{ φέρνει Γ και στις δύο δοκιμές}) = 1 - p^2.$$

Τελικά, αφού τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A' \cap B$ είναι προφανώς ξένα, έχουμε

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A \cap B) \cup (A' \cap B)) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \\ &= P(A) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + P(A') \cdot \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} \\ &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(A') \cdot P(B \mid A') \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 - (1-p)^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 - p^2) \\ &= \frac{1}{2} + p(1-p). \end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι η παραπάνω πιθανότητα μεγιστοποιείται για $p = 1/2$ (δηλ. όταν διαθέτουμε δύο συνηθισμένα νομίσματα), και η μέγιστη τιμή της ισούται με $3/4$.

Νίκος Παπαδάτος, Χαράλαμπος Χαραλαμπίδης,

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών