ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ (ΕΣΙ)
ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 25/2/2006
Λύσεις

Θέμα 1

α) Σε κάθε ζάρι το άθροισμα των ενδείξεων δύο αντίθετων εδρών (πλευρών) του ζαριού έχει άθροισμα 7: οι αντίθετες έδρες έχουν τους αριθμούς (1,6), (2,5), (3,4). Αν το άθροισμα των ενδείξεων, σε 5 ρίψεις, είναι x, τότε $5 \le x \le 30$ και το άθροισμα των ενδείξεων των αντίθετων εδρών είναι 35-x..

Αν $18 \le x \le 30 \Rightarrow 17 \ge 35 - x \ge 5$, επομένως το πλήθος των περιπτώσεων που δίνουν άθροισμα μεγαλύτερο ή ίσο του 18 είναι ίσο με το πλήθος των περιπτώσεων που δίνουν άθροισμα μικρότερο ή ίσο του 17, και η ζητούμενη πιθανότητα είναι p=1/2=0.5.

β) Το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων είναι $N = 6^5$, το πλήθος των περιπτώσεων με άθροισμα μεγαλύτερο ή ίσο του 18 είναι $6^5 / 2 = 3 \cdot 6^4$. Υπάρχει μία περίπτωση, (6,6,6,6,6), για να πάρουμε άθροισμα 30 ,και 5 περιπτώσεις, {(5,6,6,6,6), (6,5,6,6,6), (6,6,5,6,6), (6,6,6,5,6), (6,6,6,6,5)}, να πάρουμε άθροισμα 29.

Ορίζουμε το ενδεχόμενο *A*={Το άθροισμα στις 5 ρίψεις είναι μεταξύ 18 και 28}. Τότε το πλήθος των περιπτώσεων που παίρνουμε άθροισμα 18-28, είναι $N_A = 3 \cdot 6^4 - 1 - 5 = 3 \cdot 6^4 - 6$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p_A = \frac{3 \cdot 6^4 - 6}{6^5} = 0.5 - \frac{1}{6^4} = 0.4954 .$$

γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα,

A={Η έδρα «4» εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά στις 5 ρίψεις},

B={Η έδρα «5» εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά στις 5 ρίψεις},

Γ={Η έδρα «6» εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά στις 5 ρίψεις}.

Αν A' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του *A*, τότε

$$P(A') = P(B') = P(\Gamma') = \left(\frac{5}{6}\right)^5, \; P(A' \cap B') = P(A' \cap \Gamma') = P(\Gamma' \cap B') = \left(\frac{4}{6}\right)^5 \text{ και}$$

$$P(A' \cap B' \cap \Gamma') = \left(\frac{3}{6}\right)^5,$$ οπότε το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι:

$$P(A\cap B\cap \Gamma)=1-P(A^{'}\cup B^{'}\cup \Gamma^{'})=1-[P(A^{'})+P(B^{'})+P(\Gamma^{'})]$$
$$+P(A^{'}\cap B^{'})+P(A^{'}\cap \Gamma^{'})+P(B^{'}\cap \Gamma^{'})-P(A^{'}\cap B^{'}\cap \Gamma^{'})$$
$$=1-\left(3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5-3\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^5+\left(\frac{3}{6}\right)^5\right)=1-\frac{6546}{7776}=0.1582$$

Θέμα 2

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A={Παίρνει βιβλίο τουλάχιστον ένας μαθητής από Αθήνα},

B={Παίρνει βιβλίο τουλάχιστον ένας μαθητής από Θεσσαλονίκη},

Γ={Παίρνει βιβλίο τουλάχιστον ένας μαθητής από Επαρχία}.

α) $P(A)=1-P(A^{'})=1-\dfrac{\binom{11}{3}}{\binom{20}{3}}=0.855$.

Άλλος τόπος: $P(A)=1-P(A')\Rightarrow P(A)=1-\dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{20\cdot 19\cdot 18}$.

β) $P(A\cap B)=1-P(A^{'}\cup B^{'})=1-[P(A^{'})+P(B^{'})-P(A^{'}\cap B^{'})]$

$$=1-\left[\frac{\binom{11}{3}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{14}{3}}{\binom{20}{3}}-\frac{\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}\right]=0.545$$

Άλλος τρόπος: $P(A\cap B)=\dfrac{\binom{9}{2}\binom{6}{1}+\binom{9}{1}\binom{6}{2}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{20}{3}}=0.545$

γ) $P(A\cap B\cap \Gamma)=1-P(A^{'}\cup B^{'}\cup \Gamma^{'})=1-\left[P(A^{'})+P(B^{'})+P(\Gamma^{'})\right]$
$$+\left[P(A^{'}\cap \mathrm{B}^{'})+P(A^{'}\cap \Gamma^{'})+P(B^{'}\cap \Gamma^{'})-P(A^{'}\cap B^{'}\cap \Gamma^{'})\right]$$
$$=1-\frac{\binom{11}{3}}{\binom{20}{3}}-\frac{\binom{14}{3}}{\binom{20}{3}}-\frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{6}{3}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{9}{3}}{\binom{20}{3}}-0=0.237$$

Άλλος τρόπος: $P(A \cap B \cap \Gamma) = \dfrac{\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{20}{3}} = 0.237$

Θέμα 3

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα, Δ={Παίρνει το κύπελλο η ομάδα Α},

Δ_i={Παίρνει το κύπελλο η ομάδα Α στα i παιχνίδια} i=3,4,5, τότε

$\Delta_3 = \{\mathrm{AAA}\}, \Delta_4 = \{\mathrm{BAAA}, \mathrm{ABAA}, \mathrm{AABA}\},$
$\Delta_5 = \{\mathrm{BBAAA}, \mathrm{BABAA}, \mathrm{BAABA}, \mathrm{ABBAA}, \mathrm{ABABA}, \mathrm{AABBA}\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι, $P = P(\Delta_3) + P(\Delta_4) + P(\Delta_5) \Rightarrow$

$P = p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2 = p^3\left(1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2\right)$

β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο Γ={Η ομάδα Β κερδίζει το πρώτο παιχνίδι}. Τότε ζητάμε τη δεσμευμένη πιθανότητα, $P(\Delta \mid \Gamma) = \dfrac{P(\Gamma \cap \Delta)}{P(\Gamma)}$.

Όμως $\Gamma \cap \Delta = \{BAAA, BBAAA, BABAA, BAABA\}$, οπότε

$$P(\Delta \mid \Gamma) = \frac{P(\Gamma \cap \Delta)}{P(\Gamma)} = \frac{p^3[(1-p) + 3(1-p)^2)}{1-p} = p^3[4-3p].$$

Στρατής Κουνιάς, Νίκος Παπαδάτος,

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών