ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ (ΕΣΙ)
ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 2004

Θέμα 1. Εκατό μαθητές εξετάστηκαν σε 3 ερωτήματα E_1, E_2 και E_3. Είναι γνωστό ότι όλοι οι μαθητές απάντησαν (εννοείται σωστά) σε τουλάχιστον ένα ερώτημα, ενώ καθένα από τα ερωτήματα απαντήθηκε σωστά από τον ίδιο αριθμό μαθητών. Είναι επίσης γνωστό ότι 40 μαθητές απάντησαν σωστά σε τουλάχιστον 2 ερωτήματα, ενώ 10 μαθητές απάντησαν και στα 3 ερωτήματα. Διαλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη.
(α) Υπολογίστε την πιθανότητα να γνωρίζει το ερώτημα E_2.
(β) Να δείξετε ότι η πιθανότητα να γνωρίζει μόνο το E_2 δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τα παραπάνω δεδομένα, και να υπολογίσετε όλες τις δυνατές τιμές της.

Θέμα 2. Σε γνωστό παλαιότερο παιχνίδι τηλεοπτικής εκπομπής (το 'Μεγάλο Παζάρι') υπάρχουν τρεις κουρτίνες Α, Β, Γ, εκ των οποίων μονάχα μία περιέχει δώρο, ενώ οι άλλες δύο είναι άδειες. Ο παίκτης διαλέγει μία κουρτίνα στην τύχη (π.χ. την Α), και τότε ο παρουσιαστής (που γνωρίζει ποια κουρτίνα περιέχει το δώρο) ανοίγει μια άδεια κουρτίνα (χωρίς δώρο) από τις άλλες δύο και στη συνέχεια ρωτάει τον παίκτη εάν θα αλλάξει επιλογή ή όχι (αυτό προφανώς μπορεί πάντα να γίνει, διότι αν ο παίκτης έχει επιλέξει π.χ. την Α, τότε οπωσδήποτε θα υπάρχει μία άδεια κουρτίνα – μπορεί και δύο – μεταξύ των Β και Γ). Υποθέτουμε ότι ο παρουσιαστής επιλέγει τυχαία την κουρτίνα που θα αποκαλύψει στον παίκτη.
(α) Τι συμβουλεύετε να κάνει ο παίκτης;
(β) Τι θα συμβουλεύατε να κάνει ο παίκτης αν οι κουρτίνες ήταν τέσσερεις, το δώρο ένα, και ο παρουσιαστής διάλεγε και φανέρωνε τυχαία δύο από τις δύο ή τρεις άδειες κουρτίνες που δεν επέλεξε ο παίκτης;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1. Έστω Α, Β, Γ τα σύνολα εκείνων των μαθητών που απάντησαν σωστά τα ερωτήματα E_1, E_2 και E_3, αντίστοιχα, και $\Omega = \mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma$ το σύνολο όλων των μαθητών. Από τα δεδομένα μας ισχύουν τα εξής:

$$N(\Omega) = N(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma) = 100, \tag{1}$$
$$N(\mathrm{A}) = N(\mathrm{B}) = N(\Gamma), \tag{2}$$
$$N(\mathrm{AB}\Gamma) = 10 \tag{3}$$

(όπου $N(\mathrm{A})$ =πλήθος στοιχείων του Α, και γράφουμε ΑΒΓ αντί για $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma$, ΑΒ αντί για $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, κ.ο.κ.). Το σύνολο Δ των μαθητών που απάντησαν σε τουλάχιστον δύο ερωτήματα γράφεται ως ένωση των ξένων ανά δύο συνόλων ΑΒΓ, $\mathrm{A'B}\Gamma$, $\mathrm{AB'}\Gamma$, $\mathrm{AB}\Gamma'$ (όπου $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$ κ.ο.κ. συμβολίζει το συμπληρωματικό σύνολο του Α, Β κ.ο.κ.), και συνεπώς

$$N(\Delta) = N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{A'B}\Gamma) + N(\mathrm{AB'}\Gamma) + N(\mathrm{AB}\Gamma') = 40. \tag{4}$$

Θέτουμε $x = N(\mathrm{B})$ και $y = N(\mathrm{AB}) + N(\mathrm{A}\Gamma) + N(\mathrm{B}\Gamma)$.
(α) Από τις (1), (2), (3) και την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τρία σύνολα, που προκύπτει εύκολα από τη σχέση $N(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = N(\mathrm{A})+N(\mathrm{B})-N(\mathrm{AB})$ εφαρμοζόμενη στην προφανή ταυτότητα

$N(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma) = N(\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cup\Gamma))$, έχουμε

$$\begin{aligned} 100 = N(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma) &= N(\mathrm{A}) + N(\mathrm{B}) + N(\Gamma) - (N(\mathrm{AB}) + N(\mathrm{A}\Gamma) + N(\mathrm{B}\Gamma)) + N(\mathrm{AB}\Gamma) \\ &= 3x - y + 10, \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$3x - y = 90. \tag{5}$$

Λόγω των (3), (4) και των $N(\mathrm{AB}) = N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{AB}\Gamma')$, $N(\mathrm{A}\Gamma) = N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{AB}'\Gamma)$, $N(\mathrm{B}\Gamma) = N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma)$ (που συνάγονται από το γεγονός ότι π.χ. $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}\Gamma \cup \mathrm{AB}\Gamma'$ και τα $\mathrm{AB}\Gamma$ και $\mathrm{AB}\Gamma'$ είναι ξένα σύνολα), έχουμε

$$\begin{aligned} y &= N(\mathrm{AB}) + N(\mathrm{A}\Gamma) + N(\mathrm{B}\Gamma) \\ &= N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{AB}\Gamma') + N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{AB}'\Gamma) + N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma) \\ &= N(\mathrm{AB}\Gamma) + N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma) + N(\mathrm{AB}'\Gamma) + N(\mathrm{AB}\Gamma') + 2N(\mathrm{AB}\Gamma) \\ &= N(\Delta) + 2N(\mathrm{AB}\Gamma) = 60. \end{aligned} \tag{6}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5) και (6) έχουμε $3x - 60 = 90$, δηλαδή $x = N(\mathrm{B}) = 50$, και συνεπώς η πιθανότητα $\mathbb{P}(\mathrm{B})$ όπως ο τυχαία επιλεγμένος μαθητής γνωρίζει το E_2 ισούται με

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{N(\mathrm{B})}{N(\Omega)} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

(β) Εδώ ζητείται η πιθανότητα $\mathbb{P}(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') = \mathbb{P}(\mathrm{B} - (\mathrm{A}\cup\Gamma))$, δηλαδή η πιθανότητα να γνωρίζει το E_2 και όχι το E_1 ούτε το E_3. Χρησιμοποιώντας τις (3), (6) και το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) έχουμε

$$\begin{aligned} N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') &= N(\mathrm{B} - (\mathrm{A}\cup\Gamma)) \\ &= N(\mathrm{B}) - N(\mathrm{B}(\mathrm{A}\cup\Gamma)) \\ &= N(\mathrm{B}) - N(\mathrm{AB}\cup\mathrm{B}\Gamma) \\ &= N(\mathrm{B}) - (N(\mathrm{AB}) + N(\mathrm{B}\Gamma) - N(\mathrm{AB}\Gamma)) \\ &= N(\mathrm{B}) + N(\mathrm{AB}\Gamma) - N(\mathrm{AB}) - N(\mathrm{B}\Gamma) \\ &= 50 + 10 - N(\mathrm{AB}) - N(\mathrm{B}\Gamma) \\ &= N(\mathrm{A}\Gamma) \geq N(\mathrm{AB}\Gamma) = 10, \end{aligned}$$

επειδή $\mathrm{AB}\Gamma \subseteq \mathrm{A}\Gamma$. Επίσης $\mathrm{AB}\Gamma \subseteq \mathrm{AB}\cup\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}(\mathrm{A}\cup\Gamma)$, οπότε $10 = N(\mathrm{AB}\Gamma) \leq N(\mathrm{B}(\mathrm{A}\cup\Gamma))$, και συνεπώς

$$N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') = N(\mathrm{B}) - N(\mathrm{B}(\mathrm{A}\cup\Gamma)) = 50 - N(\mathrm{B}(\mathrm{A}\cup\Gamma)) \leq 40.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι $10 \leq N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') \leq 40$, και άρα

$$\frac{10}{100} \leq \mathbb{P}(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') \leq \frac{40}{100}.$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι για οποιονδήποτε ακέραιο $j \in \{10, 11, \ldots, 40\}$, υπάρχει κατανομή των απαντήσεων των 100 μαθητών τέτοια ώστε να ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του προβλήματος, και ταυτόχρονα $N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') = j$. Μια τέτοια κατανομή δίδεται από τις τιμές $N(\mathrm{AB}\Gamma) = 10$, $N(\mathrm{AB}\Gamma') = 40 - j$, $N(\mathrm{AB}'\Gamma) = j - 10$, $N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma) = 0$, $N(\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma) = 50 - j$, $N(\mathrm{A}'\mathrm{B}\Gamma') = j$,

$N(\mathrm{AB'\Gamma'}) = 10$. Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της $\mathbb{P}(\mathrm{A'B\Gamma'}) = N(\mathrm{A'B\Gamma'})/100$ είναι τα στοιχεία του συνόλου $\{j/100, j = 10, 11, \ldots, 40\}$.

Θέμα 2. (α) Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο παίκτης επιλέγει την κουρτίνα Α. Έστω Α,Β,Γ τα ενδεχόμενα όπως το δώρο βρίσκεται στην κουρτίνα Α,Β,Γ, αντίστοιχα, και έστω B_π και Γ_π τα ενδεχόμενα όπως ο παρουσιαστής αποκαλύπτει την άδεια κουρτίνα Β ή Γ, αντίστοιχα. Από τους κανόνες διεξαγωγής του παιχνιδιού προκύπτει ότι $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\Gamma) = 1/3$ και

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\Gamma_\pi|\mathrm{A}) = \frac{1}{2}, \ \ \mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\mathrm{B}) = 0, \ \mathbb{P}(\Gamma_\pi|\mathrm{B}) = 1, \ \ \mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\Gamma) = 1, \ \mathbb{P}(\Gamma_\pi|\Gamma) = 0.$$

Αν τώρα ο παρουσιαστής αποκαλύψει την Β, αν δηλαδή συμβεί το ενδεχόμενο B_π, τότε η πιθανότητα όπως το δώρο βρίσκεται στην Γ γίνεται (από $\mathbb{P}(\Gamma) = 1/3$ που ήταν πριν την αποκάλυψη)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Gamma|\mathrm{B}_\pi) = \frac{\mathbb{P}(\Gamma\mathrm{B}_\pi)}{\mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi)} &= \frac{\mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\Gamma)\mathbb{P}(\Gamma)}{\mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_\pi|\Gamma)\mathbb{P}(\Gamma)} \\ &= \frac{1(1/3)}{(1/2)(1/3) + 0(1/3) + 1(1/3)} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

ενώ με ανάλογο υπολογισμό προκύπτει ότι η $\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_\pi)$ παραμένει 1/3, όπως και πριν την αποκάλυψη. Άρα ο παίκτης έχει διπλάσια πιθανότητα να πετύχει το δώρο αλλάζοντας κουρτίνα. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και όταν ο παρουσιαστής ανοίξει την κουρτίνα Γ, οπότε και πάλι η πιθανότητα το δώρο να βρίσκεται στην Β είναι διπλάσια απ' ότι στην Α. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι σε κάθε περίπτωση ο παίκτης πρέπει να αλλάξει κουρτίνα.

(β) Υποθέτουμε και πάλι ότι ο παίκτης έχει αρχικά επιλέξει την Α, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Συμβολίζοντας με Α, Β, Γ, Δ τα ενδεχόμενα όπως το δώρο βρίσκεται στην κουρτίνα Α, Β, Γ, Δ, αντίστοιχα, και με $\overline{\Delta} = (\mathrm{B}_\pi, \Gamma_\pi)$, $\overline{\Gamma} = (\mathrm{B}_\pi, \Delta_\pi)$, $\overline{\mathrm{B}} = (\Gamma_\pi, \Delta_\pi)$ τα ενδεχόμενα όπως ο παρουσιαστής ανοίξει τις κουρτίνες $\{\mathrm{B}, \Gamma\}$, $\{\mathrm{B}, \Delta\}$ ή $\{\Gamma, \Delta\}$, αντίστοιχα, έχουμε $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\Gamma) = \mathbb{P}(\Delta) = 1/4$, και

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\overline{\Delta}|\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\overline{\Gamma}|\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{A}) = 1/3, \\ &\mathbb{P}(\overline{\Delta}|\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\overline{\Gamma}|\mathrm{B}) = 0, \ \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{B}) = 1, \\ &\mathbb{P}(\overline{\Delta}|\Gamma) = \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}|\Gamma) = 0, \ \mathbb{P}(\overline{\Gamma}|\Gamma) = 1, \\ &\mathbb{P}(\overline{\Gamma}|\Delta) = \mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}}|\Delta) = 0, \ \mathbb{P}(\overline{\Delta}|\Delta) = 1.\end{aligned}$$

Αν ο παρουσιαστής αποκαλύψει τις κουρτίνες Β και Γ, αν δηλαδή συμβεί το $\overline{\Delta} = (\mathrm{B}_\pi, \Gamma_\pi)$, τότε η πιθανότητα το δώρο να βρίσκεται στην Δ γίνεται

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Delta|\overline{\Delta}) = \frac{\mathbb{P}(\Delta\overline{\Delta})}{\mathbb{P}(\overline{\Delta})} &= \frac{\mathbb{P}(\overline{\Delta}|\Delta)\mathbb{P}(\Delta)}{\mathbb{P}(\overline{\Delta}|\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\overline{\Delta}|\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{B}) + \mathbb{P}(\overline{\Delta}|\Gamma)\mathbb{P}(\Gamma) + \mathbb{P}(\overline{\Delta}|\Delta)\mathbb{P}(\Delta)} \\ &= \frac{1(1/4)}{(1/3)(1/4) + 0(1/4) + 0(1/4) + 1(1/4)} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Το ίδιο προκύπτει και όταν ο παρουσιαστής αποκαλύψει τις Β και Δ ή τις Γ και Δ. Άρα ο παίκτης τριπλασιάζει την πιθανότητά του αλλάζοντας κουρτίνα.

Σημείωση. Τα παραπάνω αποτελέσματα γίνονται διαισθητικά προφανή αν παρατηρήσουμε ότι ο παίκτης κερδίζει αλλάζοντας κουρτίνα όταν και μόνο όταν η αρχική του επιλογή είναι εσφαλμένη.

Ν. Παπαδάτος, Ι. Αλεξίου
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών