ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ (ΕΣΙ)
ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 2003

Θέμα 1. Σε ένα σχολείο με 300 παιδιά, 180 αγόρια και 120 κορίτσια, θα εκλεγούν στην τύχη 15 άτομα, τα οποία θα αποτελέσουν το 15μελές.
(α) Υπολογίστε την Πιθανότητα να εκλεγούν κ κορίτσια, για $\kappa = 0, 1, \ldots, 15$.
(β) Ποια η πιθανότητα να εκλεγούν τουλάχιστον 12 αγόρια;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγούν στο 15μελές ταυτόχρονα ο καλύτερος μαθητής και η καλύτερη μαθήτρια του σχολείου;

Θέμα 2. Θεωρούμε ένα σύνολο με $\nu + \kappa$ στοιχεία, όπου $\nu \geq 1$ και $\kappa \geq 1$, π.χ. το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu + \kappa\}$. Επίσης θεωρούμε όλες τις 'λέξεις' με $\nu + \kappa$ σύμβολα A και B, οι οποίες αποτελούνται από ν σύμβολα A και κ σύμβολα B.
(α) Πόσα υποσύνολα του Ω έχουν ακριβώς κ στοιχεία;
(β) Περιγράψτε μια ένα προς ένα και επί (αμφιμονοσήμαντη) αντιστοιχία μεταξύ των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν ακριβώς κ στοιχεία και των 'λέξεων' με $\nu + \kappa$ σύμβολα A και B, εκ των οποίων τα ν είναι A και τα υπόλοιπα κ είναι B.
(γ) Αν διαλέξουμε μια από τις παραπάνω 'λέξεις' στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να μην περιέχει σύμβολο B μεταξύ δυο οποιωνδήποτε συμβόλων A;
(δ) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των πρώτων ν φυσικών αριθμών διαιρεί οποιοδήποτε γινόμενο αποτελούμενο από τουλάχιστον ν διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, δηλαδή ότι το $\nu!$ διαιρεί το $(\kappa + 1)(\kappa + 2) \cdots (\kappa + s)$, για οποιουσδήποτε φυσικούς $\kappa \geq 0$ και $s \geq \nu$.

Θέμα 3. Διαθέτουμε ένα συμμετρικό νόμισμα και ένα συμμετρικό ζάρι, και εκτελούμε το εξής τυχαίο πείραμα: Ρίχνουμε πρώτα το ζάρι, και στη συνέχεια, 'στρίβουμε' κ φορές το νόμισμα, όπου $\kappa \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ ο αριθμός που έφερε το ζάρι.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε περιττό αριθμό κεφαλών;
(β) Δεδομένου ότι φέραμε περιττό αριθμό κεφαλών, ποια η πιθανότητα να είχε εμφανίσει το ζάρι την ένδειξη 3;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1. Προφανώς το πλήθος των δυνατών 15-άδων είναι $\binom{300}{15}$.

(α) Οι ευνοϊκές 15-άδες για κ κορίτσια (άρα $15-\kappa$ αγόρια) είναι πλήθους

$$\binom{120}{\kappa}\binom{180}{15-\kappa},$$

σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, αφού για κάθε μια εκλογή κ κοριτσιών από τα 120 με $\binom{120}{\kappa}$ τρόπους, υπάρχουν $\binom{180}{15-\kappa}$ τρόποι να εκλεγούν τα $15-\kappa$ αγόρια από τα 180. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_\kappa = \frac{\binom{120}{\kappa}\binom{180}{15-\kappa}}{\binom{300}{15}}, \text{ για } \kappa = 0, 1, \ldots, 15.$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι, σύμφωνα με το (α), ίση με

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{\binom{300}{15}}\left[\binom{180}{15} + \binom{120}{1}\binom{180}{14} + \binom{120}{2}\binom{180}{13} + \binom{120}{3}\binom{180}{12}\right].$$

(γ) Εδώ το πλήθος των ευνοϊκών 15-άδων είναι $\binom{2}{2}\binom{298}{13}$ (αφού θέλουμε και ο καλύτερος μαθητής και η καλύτερη μαθήτρια να συμπεριλαμβάνονται στο 15-μελές, ενώ τα άλλα 13 άτομα του 15-μελούς μπορούν να εκλεγούν αυθαίρετα από τους υπόλοιπους 298 μαθητές), και συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{298}{13}}{\binom{300}{15}} = \frac{\binom{298}{13}}{\binom{300}{15}} = \frac{7}{2990}.$$

Θέμα 2. (α) Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε με στοιχεία του Ω μια διατεταγμένη $\kappa-$άδα της μορφής

$$(a_1, \ldots, a_\kappa) \text{ με } a_i \neq a_j \text{ για } i \neq j, \text{ όπου } a_1, \ldots, a_\kappa \in \Omega, \tag{0.1}$$

(η οποία καλείται *διάταξη*) με $(\nu+\kappa)(\nu+\kappa-1)\cdots(\nu+1)$ τρόπους. Επειδή σε κάθε υποσύνολο $\{a_1, \ldots, a_\kappa\}$ του Ω με κ στοιχεία αντιστοιχούν $\kappa!$ διατάξεις της μορφής (1), και συγκεκριμένα εκείνες που προκύπτουν με αναδιάταξη των στοιχείων $a_1, \ldots a_\kappa$ κατά όλους τους δυνατούς τρόπους (που, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, είναι πλήθους $\kappa!$), συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$\frac{(\nu+\kappa)(\nu+\kappa-1)\cdots(\nu+1)}{\kappa!} = \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!\ \kappa!} = \binom{\nu+\kappa}{\kappa}$$

υποσύνολα του Ω με κ στοιχεία.
(β) Η 'λέξη' που περιέχει τα κ σύμβολα Β στις θέσεις υπ' αριθμόν $i_1, i_2, \ldots, i_\kappa$ (με $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\kappa \leq \nu+\kappa$) αντιστοιχίζεται κατά μοναδικό τρόπο στο υποσύνολο του Ω $\{i_1, i_2, \ldots, i_\kappa\}$ (που έχει κ στοιχεία), και αντίστροφα.
(γ) Από τα ερωτήματα (α) και (β) προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{\nu+\kappa}{\kappa}$ 'λέξεις' (οι δυνατές περιπτώσεις). Για τις ευνοϊκές περιπτώσεις έχουμε: Έστω j η πρώτη θέση της 'λέξης' που έχει Α και s η τελευταία. Για να υπάγεται στις ευνοϊκές η λέξη αυτή, πρέπει

και αρκεί όλες οι θέσεις $j, j+1, \ldots, s$, και μόνον αυτές, να καταλαμβάνονται από Α, και συνεπώς $s = j + (\nu - 1)$. Από τις ανισότητες $j \geq 1$ και $s = j + (\nu - 1) \leq \nu + \kappa$ προκύπτει ότι $1 \leq j \leq \kappa + 1$, και επομένως οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι πλήθους $\kappa + 1$ (για $j = 1, 2, \ldots, \kappa + 1$). Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\kappa+1}{\binom{\nu+\kappa}{\kappa}}.$$

(δ) Αφού ο αριθμός $\binom{\nu+\kappa}{\kappa} = \frac{(\nu+\kappa)!}{\nu!\ \kappa!} = \frac{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\nu)}{\nu!}$ παριστάνει πλήθος αντικειμένων (και συγκεκριμένα, το πλήθος υποσυνόλων του ερωτήματος (α) ή το πλήθος 'λέξεων' του ερωτήματος (β)), έπεται ότι είναι φυσικός αριθμός, και επομένως ο αριθμός $\nu!$ διαιρεί τον αριθμό $(\kappa+1)\cdots(\kappa+\nu)$. Συνεπώς, όταν $s \geq \nu$, διαιρεί και τον αριθμό $(\kappa+1)\cdots(\kappa+s) = (\kappa+1)\cdots(\kappa+\nu)\mu$, όπου μ κάποιος ακέραιος.

Θέμα 3. (α) Για $\kappa = 1, 2, \ldots, 6$, ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$A_\kappa = \{\text{το ζάρι έφερε αποτέλεσμα } \kappa\},$$

και έστω B το ενδεχόμενο περιττού αριθμού κεφαλών. Εύκολα βρίσκουμε

$$\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B|A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

και γενικότερα

$$\mathbb{P}(B|A_\kappa) = \frac{2^{\kappa-1}}{2^\kappa} = \frac{1}{2}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, 6,$$

διότι, δεδομένου του A_κ, υπάρχουν 2^κ ακολουθίες μήκους κ από Κ (κεφαλή) και Γ (γράμματα), από τις οποίες οι μισές περιέχουν περιττό αριθμό από Κ και οι άλλες μισές άρτιο. Επειδή προφανώς $\mathbb{P}(A_\kappa) = \frac{1}{6}$, έχουμε

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(B|A_\kappa)\,\mathbb{P}(A_\kappa) = \frac{1}{2}.$$

(β) Έχουμε

$$\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(A_3 B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_3)\,\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών