ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ (ΕΣΙ)
ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 2002

Θέμα 1. Διαλέγουμε έναν αριθμό στην τύχη από τους $\{1, 2, \ldots, 2002\}$. Ποια η πιθανότητα να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς $6, 10, 15$; Ποια η πιθανότητα να διαιρείται με ακριβώς δύο από τους $6, 10, 15$;

Θέμα 2. Έστω ότι ένα σώμα 10 εκλεκτόρων πρόκειται να εκλέξει με απόλυτη πλειοψηφία έναν μεταξύ των υποψηφίων Α και Β. Υποθέτουμε επίσης ότι οι εκλέκτορες ψηφίζουν στην τύχη.
(α) Ποια η πιθανότητα να εκλεγεί ο Α;
(β) Ποια η πιθανότητα να εκλεγεί ο Α αν οι εκλέκτορες ήταν 11;

Θέμα 3. Υποθέτουμε ότι ν ομάδες ($\nu > 2$), μεταξύ των οποίων ο Ολυμπιακός και ο Παναθηναϊκός, συμμετέχουν στο θεσμό του κυπέλλου. Σε κάθε γύρο οι εναπομένουσες ομάδες κληρώνονται σε ζεύγη, από τα οποία αποκλείεται η μία από τις δύο με πιθανότητα $1/2$ (αν σε κάποιον γύρο ο αριθμός των συμμετεχουσών ομάδων είναι περιττός, τότε προκρίνεται στην τύχη μια ομάδα στον επόμενο γύρο χωρίς να αγωνιστεί). Ο αγώνας που γίνεται στο τέλος της διαδικασίας μεταξύ των δύο τελευταίων ομάδων ονομάζεται **τελικός**, η δε ομάδα που τον κερδίζει ονομάζεται **κυπελλούχος**. Να υπολογιστούν οι εξής πιθανότητες:
(α) Να συναντηθεί ο Ολυμπιακός με τον Παναθηναϊκό στον τελικό.
(β) Να συμμετάσχει ο Ολυμπιακός στον τελικό.
(γ) Κυπελλούχος να αναδειχθεί ο Ολυμπιακός.
(δ) Να συναντηθούν κάποτε ο Ολυμπιακός με τον Παναθηναϊκό (όχι κατ' ανάγκη στον τελικό).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2002\}$. Για οποιοδήποτε $A \subseteq \Omega$ έχουμε $\mathbb{P}(A) = N(A)/2002$, όπου $N(A) =$ πλήθος στοιχείων του A. Θέτουμε

$$A_1 = \{\text{οι αριθμοί που διαιρούνται με το } 6\} = \{6, 12, \ldots, 1998\},$$

$$A_2 = \{\text{οι αριθμοί που διαιρούνται με το } 10\} = \{10, 20, \ldots, 2000\}$$

και

$$A_3 = \{\text{οι αριθμοί που διαιρούνται με το } 15\} = \{15, 30, \ldots, 1995\}.$$

Τότε

$$N(A_1) = \left[\frac{2002}{6}\right] = \frac{1998}{6} = 333,$$

$$N(A_2) = \left[\frac{2002}{10}\right] = \frac{2000}{10} = 200 \quad \text{και} \quad N(A_3) = \left[\frac{2002}{15}\right] = \frac{1995}{15} = 133.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{30, 60, \ldots, 1980\}$$

και συνεπώς,

$$N(A_1 \cap A_2) = N(A_1 \cap A_3) = N(A_2 \cap A_3) = N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left[\frac{2002}{30}\right] = \frac{1980}{30} = 66.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) \\ &\quad -N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_3) \\ &\quad +N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 333 + 200 + 133 - 66 - 66 - 66 + 66 = 534, \end{aligned}$$

η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = \frac{N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}{2002} = \frac{534}{2002} = \frac{267}{1001}.$$

Τέλος παρατηρούμε ότι

$$(A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (A_2 \cap A_3) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \emptyset,$$

και συνεπώς δεν υπάρχουν αριθμοί που να διαιρούνται με ακριβώς δύο από τους $6, 10, 15$ (θα διαιρούνται αναγκαστικά και με τον τρίτο). Άρα η πιθανότητα είναι 0.

Θέμα 2. (α) Η πιθανότητα ισοψηφίας των Α και Β υπολογίζεται ως εξής: Οι ευνοϊκές περιπτώσεις ισοψηφίας είναι πλήθους

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252,$$

όσες και οι διατεταγμένες δεκάδες $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ με ακριβώς πέντε $x_i = A$ και τα υπόλοιπα πέντε $x_i = B$. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι $2^{10} = 1024$, όσες και οι δυνατές δεκάδες $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ με $x_i \in \{A, B\}$. Επομένως,

$$\mathbb{P}\left(\text{ισοψηφίας}\right) = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

και έτσι η πιθανότητα να εκλεγεί ο Α ή ο Β είναι

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\text{ισοψηφίας}\right) = 1 - \frac{63}{256} = \frac{193}{256}.$$

Επειδή $A\cap B=\emptyset$ (δεν μπορεί να εκλεγεί ταυτόχρονα και ο Α και ο Β) και $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)$ λόγω συμμετρίας, έχουμε

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=2\mathbb{P}(A)=\frac{193}{256},$$

δηλαδή $\mathbb{P}(A)=193/512$.
(β) Αν οι εκλέκτορες ήταν 11, τότε προφανώς $\mathbb{P}(\text{ισοψηφίας})=0$, οπότε $\mathbb{P}(A)=1/2$.

Θέμα 3. (α) Λόγω συμμετρίας, όλα τα ζεύγη ομάδων έχουν την ίδια πιθανότητα να αποτελέσουν το ζευγάρι του τελικού. Όμως τα δυνατά ζεύγη είναι πλήθους

$$\binom{\nu}{2}=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$$

και το ευνοϊκό (το ζεύγος {Ολυμπιακός, Παναθηναϊκός}) ένα. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1}{\binom{\nu}{2}}=\frac{2}{\nu(\nu-1)}.$$

(β) Τα ζεύγη ομάδων που περιέχουν τον Ολυμπιακό είναι της μορφής {Ολυμπιακός, x}, όπου x οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες $\nu-1$ ομάδες, άρα πλήθους $\nu-1$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\nu-1}{\binom{\nu}{2}}=\frac{2}{\nu}.$$

(γ) Λόγω συμμετρίας και πάλι, η πιθανότητα να αναδειχθεί κυπελλούχος ο Ολυμπιακός είναι όση και για κάθε άλλη ομάδα, δηλαδή $\frac{1}{\nu}$ (αυτό μπορεί επίσης να δειχθεί χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (β)).
(δ) Παρατηρούμε ότι κατά τη διαδικασία διεξαγωγής του θεσμού θα πραγματοποιηθούν συνολικά $\nu-1$ αγώνες (διότι σε κάθε αγώνα, μέχρι και τον τελικό, αποκλείεται μία ομάδα, οπότε για να μείνει μόνο ένας νικητής απαιτούνται $\nu-1$ αγώνες). Άρα, τα ευνοϊκά σημεία (οι αγώνες που θα πραγματοποιηθούν) είναι πλήθους $\nu-1$, ενώ τα δυνατά σημεία είναι πλήθους $\nu(\nu-1)/2$, όσα και τα δυνατά ζεύγη αγώνων. Επομένως, η πιθανότητα το ζεύγος {Ολυμπιακός, Παναθηναϊκός} να περιέχεται σε κάποιον από τους $\nu-1$ αγώνες που θα πραγματοποιηθούν είναι

$$\frac{\nu-1}{\binom{\nu}{2}}=\frac{2}{\nu},$$

όση δηλαδή και στο (β).

Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών