ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2014

ΘΕΜΑ 1. (α) Να δοθεί παράδειγμα ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών T_n και τυχαίας μεταβλητής T με $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} T$, $\mathrm{Var}(T_n) < \infty$ για κάθε n, $\mathrm{Var}(T) < \infty$ και $\mathrm{Var}(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \nrightarrow \mathrm{Var}(T)$.

(β) Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, να υπολογίσετε την ασυμπτωτική κατανομή της $X_{n:n} - \log(n)$ όπου $X_{n:n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}|X_1|^6 < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Να βρείτε την οριακή κατανομή της ακολουθίας των διδιάστατων τυχαίων διανυσμάτων

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X}_n - \mu \\ M_{3,n} - \mu_3 \end{pmatrix}$$

όπου $\overline{X}_n$ η ακολουθία των δειγματικών μέσων, $M_{3,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^3$ η ακολουθία των δειγματικών κεντρικών ροπών τρίτης τάξης και $\mu_3 = \mathbb{E}(X_1 - \mu)^3$ η πληθυσμιακή κεντρική ροπή τρίτης τάξης. Ποια είναι η οριακή κατανομή όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i προέρχονται από την κανονική $N(\mu, \sigma^2)$;

ΘΕΜΑ 3. Το τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ προέρχεται από την κανονική κατανομή $N(\theta, \theta^2)$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση πιθανοφάνειας έχει μοναδική λύση την

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{2}\left[\left((\overline{X}_n)^2 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2} - \overline{X}_n\right],$$

και να βρείτε την οριακή κατανομή της $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$.

(β) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο κυρτό συνδυασμό των $\overline{X}_n$ και $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}$ να βρείτε μία δεύτερη ασυμτωτικά αποδοτική ακολουθία εκτιμητριών.

(γ) Να γίνει ο έλεγχος της $H_0 : \theta = \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ χρησιμοποιώντας τα κριτήρια Wald, Rao και LR.

ΘΕΜΑ 4. Έστω $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}|Y|^2 < \infty$, $\mathbb{E}(Y) = \mu$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Θέτουμε $X_i = \frac{1}{i}Y + Y_i$, $i = 1, 2 \ldots$ και $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Να βρείτε την οριακή κατανομή της ακολουθίας $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!