ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ), ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2014

ΘΕΜΑ 1. (α) Να δοθεί παράδειγμα ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών T_n και τυχαίας μεταβλητής T με $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{d}} T$, $\mathrm{Var}(T_n) < \infty$ για κάθε n, $\mathrm{Var}(T) < \infty$ και $\mathrm{Var}(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \nrightarrow \mathrm{Var}(T)$. Μπορεί η T να ακολουθεί τυποποιημένη κανονική; Μπορεί, επιπροσθέτως, να ισχύει και η σχέση $\mathbb{E}(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \nrightarrow \mathbb{E}(T) = 0$;

(β) Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή $E(\theta)$, $\theta > 0$, με πυκνότητα $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, να υπολογίσετε την ασυμπτωτική κατανομή της $X_{n:n} - \frac{1}{\theta}\log(n)$ όπου $X_{n:n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}|X_1|^{2k} < \infty$ για κάποιον ακέραιο $k \geq 2$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Να βρείτε την οριακή κατανομή της ακολουθίας των διδιάστατων τυχαίων διανυσμάτων

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X}_n - \mu \\ M_{k,n} - \mu_k \end{pmatrix}$$

όπου $\overline{X}_n$ η ακολουθία των δειγματικών μέσων, $M_{k,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$ η ακολουθία των δειγματικών κεντρικών ροπών και $\mu_k = \mathbb{E}(X_1 - \mu)^k$ η πληθυσμιακή κεντρική ροπή τάξης k. Ποια είναι η οριακή κατανομή όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i προέρχονται από την κανονική $N(\mu, \sigma^2)$;

ΘΕΜΑ 3. Το τυχαίο δείγμα $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ προέρχεται από την τυποποιημένη διδιάστατη κανονική κατανομή, $N_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$, με πυκνότητα

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \rho \in \Theta = (-1,1).$$

(α) Να δείξετε ότι $(X_1, Y_1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z_1, \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2)$, όπου οι Z_1, Z_2 είναι ανεξάρτητες κανονικές $N(0,1)$, και να υπολογίσετε τις ροπές

$$\mu_{i,j} = \mathbb{E}(X_1^i Y_1^j), \quad i,j \geq 0, \quad 1 \leq i + j \leq 4.$$

(β) Υπολογίστε τον αριθμό πληροφορίας $I(\rho)$ και δείξτε ότι με πιθανότητα 1 η εξίσωση πιθανοφάνειας έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

(γ) Δείξτε ότι η $\widetilde{\rho}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i$ είναι ασυμπτωτικά κανονική εκτιμήτρια του ρ.

(δ) Βρείτε ασυμπτωτικά αποδοτική εκτιμήτρια, $\widehat{\rho}_n$, του ρ, και συγκρίνετε με την $\widetilde{\rho}_n$.

(ε) Να κατασκευστεί ένα ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης για το ρ, με ασυμπτωτικό συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

(στ) Να γίνει ο έλεγχος της $H_0 : \rho = 0$ χρησιμοποιώντας τα κριτήρια Wald, Rao και LR.

ΘΕΜΑ 4. Το τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ προέρχεται από την κανονική κατανομή $N(\theta, \theta^2)$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση πιθανοφάνειας έχει μοναδική λύση την

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{2}\left[\left((\overline{X}_n)^2 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2} - \overline{X}_n\right],$$

και να βρείτε την οριακή κατανομή της $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$.

(β) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο κυρτό συνδυασμό των $\overline{X}_n$ και $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}$ να βρείτε μία δεύτερη ασυμπτωτικά αποδοτική ακολουθία εκτιμητριών.

(γ) Να γίνει ο έλεγχος της $H_0 : \theta = \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ χρησιμοποιώντας τα κριτήρια Wald, Rao και LR.

ΘΕΜΑ 5. Έστω $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}|Y|^2 < \infty$, $\mathbb{E}(Y) = \mu$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Θέτουμε $X_i = \frac{1}{i}Y + Y_i$, $i = 1, 2 \ldots$ και $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Να βρείτε την οριακή κατανομή της ακολουθίας $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$. .

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!