ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Θέμα 1. Άτομο με ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - \exp(-2w)$, $w \geq 0$, πρόκειται να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη ζημιάς X με πυκνότητα $f(x) = 4\exp(-4x)$, $x \geq 0$. Ο ασφαλιστής του προτείνει μερική κάλυψη της μορφής

$$I_d(X) = \max\{0, X - d\} = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad 0 \leq X \leq d, \\ X - d, & \text{αν} \quad X \geq d, \end{cases}$$

όπου $d \geq 0$ προσδιοριστέα σταθερά. Ο υποψήφιος ασφαλισμένος διαθέτει ποσό $G = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$ ως ασφάλιστρο για την παραπάνω μερική κάλυψη της ζημιάς. (α) Προσδιορίστε τη σταθερά d έτσι ώστε η μέση ωφέλεια του ασφαλιζόμενου να είναι ίση, με ή χωρίς κάλυψη του κινδύνου. (β) Ποια η πιθανότητα ο ασφαλισμένος να πληρώσει τελικά ασφάλιστρο μεγαλύτερο της κάλυψης που θα του παράσχει η εταιρεία; (γ) Ποιο το μέσο κέρδος της εταιρείας αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει στην κάλυψη του παραπάνω κινδύνου;

Θέμα 2. Τα ποσά των ατομικών ζημιών $X_1, X_2, \ldots$ (σε χιλιάδες Ευρώ) που πρόκειται να καταβάλλει ο κλάδος ζημιών μιας εταιρείας στη διάρκεια του επόμενου έτους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με Εκθετική κατανομή παραμέτρου 1, δηλαδή με πυκνότητες $f_{X_i}(x) = e^{-x}$, $x > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, το δε πλήθος ζημιών N_ν ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους $r = \nu > 0$ και $p = 1/2$, δηλαδή

$$\mathbb{P}[N_\nu = n] = \binom{\nu + n - 1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Έστω $S_\nu = S_{N_\nu} = X_1 + \cdots + X_{N_\nu}$ η συνολική αποζημίωση που θα πληρώσει ο κλάδος της εταιρείας.

(α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\mathrm{Var}[S_\nu]$ της S_ν.

(γ) Το συνολικό αποθεματικό της εταιρείας για την κάλυψη αυτού του τύπου των ζημιών είναι $w = 1000$ (χιλιάδες Ευρώ) και οι αναλογιστές της εν λόγω εταιρείας έχουν υπολογίσει ότι η παράμετρος $\nu = 1000$. Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα να ζημιώσει η εταιρεία στον κλάδο αυτό, δηλαδή την $\mathbb{P}[S_{1000} > 1000]$. [**Σημείωση:** Να αναφερθούν όλες οι υποθέσεις όποιου θεωρήματος χρησιμοποιηθεί στο ερώτημα (γ), και να ελεγχθεί η ισχύς τους.]

Θέμα 3. Η θνησιμότητα ατόμου ηλικίας x είναι $\mu_x = \theta/(x+1)$, $x \geq 0$, όπου $\theta > 1$. Για τυχόν $x \geq 0$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x, δηλαδή του (x). Υπολογίστε (α) τη συνάρτηση επιβίωσης $s(x)$, (β) την πιθανότητα ${}_tp_x$ όπως ο (x) επιβιώσει για t ακόμη έτη, και (γ) τη μέση υπόλοιπη ζωή, $\mathbb{E}[T_x]$, του (x). (δ) Αν είναι γνωστό ότι η μέση υπόλοιπη ζωή του (3) είναι 80 έτη, να βρείτε τη σταθερά θ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!