ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004

Θέμα 1. Μια ασφαλιστική εταιρεία απαιτεί ασφάλιστρο $G = (6/5)\mathbb{E}[I(X)]$ για μερική κάλυψη της μορφής $I(X)$ τυχαίας ζημιάς X. Υποθέτουμε ότι η προς ασφάλιση ζημιά X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{100}, \quad x = 1, 2, \ldots, 100,$$

και το διατιθέμενο ασφάλιστρο είναι $G = 34.2$.
(α) Να προσδιοριστεί η σταθερά d για κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς της μορφής $I(X) = I_d(X) = \max\{0, X - d\}$.
(β) Να βρείτε την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία που καλύπτει τον κίνδυνο X.
(γ) Να υπολογιστεί το μέσο κέρδος της εταιρείας που καλύπτει τον κίνδυνο X.

Θέμα 2. Υποθέτουμε ότι η S_1 είναι σύνθετη Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους $r \in \{1, 2, \ldots\}$ και $p = 1/2$ και συνάρτηση πιθανότητας ατομικής ζημιάς τη Γεωμετρική με παράμετρο $p_1 \in (0, 1)$ (δηλαδή, $S_1 = X_1 + \cdots + X_{N_1}$ με $\mathbb{P}(N_1 = n_1) = \binom{n_1+r-1}{n_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{r+n_1}$, $n_1 = 0, 1, \ldots$, και $\mathbb{P}(X_i = x) = p_1(1 - p_1)^x$, $x = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$). Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι η S_2 είναι σύνθετη Διωνυμική με παραμέτρους $r \in \{1, 2, \ldots\}$ και $p = 1/2$ (όπως για την S_1) και συνάρτηση πιθανότητας ατομικής ζημιάς τη Γεωμετρική με παράμετρο $p_2 \in (0, 1)$ (δηλαδή, $S_2 = Y_1 + \cdots + Y_{N_2}$ με $\mathbb{P}(N_2 = n_2) = \binom{r}{n_2}\left(\frac{1}{2}\right)^r$, $n_2 = 0, 1, \ldots, r$, και $\mathbb{P}(Y_j = y) = p_2(1 - p_2)^y$, $y = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$). Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων p_1 και p_2 τέτοιες ώστε οι S_1 και S_2 να έχουν την ίδια κατανομή (να είναι ισόνομες) και, αν υπάρχουν, να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα p_1 και p_2.

Θέμα 3. (α) Οι (τυχαίες) ετήσιες εντάσεις ανατοκισμού $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα

$$g(\delta) = 10, \quad 0 < \delta < 1/10.$$

Να υπολογισθούν: (i) η πυκνότητα $f(i)$ των αντιστοίχων ετήσιων επιτοκίων $I_j = e^{\Delta_j} - 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, και (ii) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη.
(β) Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι $\mu_x = 1/10$, $x \geq 0$. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της υπόλοιπης ζωής του (x) (δηλαδή ατόμου ηλικίας x).

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!