ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2007

1ο	2ο	3ο	4ο	5ο	6ο	7ο	Σ

Α.Μ:...

ΕΠΩΝΥΜΟ:...

ΟΝΟΜΑ:...

ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ:................................

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:..10..Ιουλίου..2007........

ΠΕΡΙΟΔΟΣ:...Φεβρουαρίου...2007..........

Προσοχή!!! Οδηγίες συμπλήρωσης του διαγωνίσματος:
1) Μπορείτε να επιλέξετε το πολύ έξι (6) από τα επτά (7) θέματα.
2) Κάθε υποερώτημα έχει επιλογές της μορφής Α,Β,Γ,Δ (ή λιγότερες), από τις οποίες ακριβώς μία είναι σωστή.
3) Κάθε ορθή επιλογή από τα Α,Β,Γ,Δ (για κάθε υποερώτημα) βαθμολογείται με $+2$, κάθε εσφαλμένη με -1, ενώ η μη συμπλήρωση βαθμολογείται με 0.
4) Το Άριστα (10) ισοδυναμεί με 30 μονάδες, ενώ το 5 (βάση) αντιστοιχεί σε 14 μονάδες, δηλαδή σε 7 σωστές απαντήσεις (3 θέματα), με την προϋπόθεση, φυσικά, ότι δεν έχουν γίνει σφάλματα σε άλλα υποερωτήματα – προφανώς, τυχόν σφάλματα ενδέχεται να οδηγήσουν σε αρνητική συνεισφορά στην τελική βαθμολογία. Σημειώνεται ότι δεν είναι αναγκαίο να συμπληρώσετε όλα τα υποερωτήματα, αφού πλήρης και σωστή απάντηση και στα 20 υποερωτήματα του διαγωνίσματος αντιστοιχεί σε 40 μονάδες.
5) Η διάρκεια εξέτασης είναι δύο και μισι (2.5) ώρες, και το φυλλάδιο των θεμάτων, με τις απαντήσεις, παραδίδεται **ολόκληρο**.
6) Οι απαντήσεις σας πρέπει να δίδονται στον **ΠΙΝΑΚΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ**, παρακάτω, βάζοντας σε κύκλο ένα από τα Α,Β,Γ,Δ σε κάθε υποερώτημα. **Μόνο οι απαντήσεις που δίδονται στον ΠΙΝΑΚΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ, παρακάτω, θα ληφθούν υπόψιν κατά την βαθμολόγηση.**
7) Μπορείτε να χρησιμοποιείτε για πρόχειρο όλες τις σελίδες του φυλλαδίου, εκτός της παρούσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θέμα 1ο (α) (β) (γ)	**Θέμα 2ο** (α) (β) (γ)	**Θέμα 3ο** (α) (β)	**Θέμα 4ο** (α) (β) (γ)	**Θέμα 5ο** (α) (β) (γ)	**Θέμα 6ο** (α) (β) (γ)	**Θέμα 7ο** (α) (β) (γ)
Α Α Α Β Β Β Γ	Α Α Α Β Β Β Γ Γ Δ Δ	Α Α Β Β Γ Γ Δ Δ	Α Α Α Β Β Β Γ Γ Γ Δ Δ Δ	Α Α Α Β Β Β Γ Γ	Α Α Α Β Β Β Γ Γ Γ Δ Δ Δ	Α Α Α Β Β Β Γ Γ Γ Δ Δ Δ

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο. Το w παριστάνει κεφάλαιο, η τυχαία μεταβλητή X την ζημιά, και $u = u(w)$ είναι η ωφελιμοσυνάρτηση (ασφαλιζόμενου ή ασφαλιστικής εταιρείας). Επίσης, με $G_{\max}$ συμβολίζουμε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από τον ασφαλιζόμενο, και με $H_{\min}$ το ελάχιστο αποδεκτό ασφάλιστρο από την εταιρεία.

(α) Η ανίσωση του ασφαλιζόμενου είναι της μορφής:

Α: $\mathbb{E}[u(w - X)] \geq u(w - G)$ Β: $\mathbb{E}[u(w - X)] \leq u(w - G)$

(β) Η ανίσωση του ασφαλιστή είναι της μορφής:

Α: $u(w) \geq \mathbb{E}[u(w + H - X)]$ Β: $u(w) \leq \mathbb{E}[u(w + H - X)]$

(γ) Αν υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική, τότε ισχύει ότι:

Α: $G_{\max} \leq H_{\min}$ Β: $G_{\max} = H_{\min}$ Γ: $G_{\max} \geq H_{\min}$

Θέμα 2ο. Άτομο με κεφάλαιο $w = 10$ και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 20w - w^2$ πρόκειται να ασφαλιστεί για ολική κάλυψη ζημιάς X με πυκνότητα

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

Η ασφαλιστική εταιρεία που προτίθεται να ασφαλίσει τη ζημιά διαθέτει κεφάλαιο $w_0 = 4000$ και ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w) = 17 - 2e^{-w}$.

(α) Το μέγιστο ασφάλιστρο, $G_{\max}$, που δέχεται να πληρώσει ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος είναι:

Α: $G_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ Β: $G_{\max} = \sqrt{\dfrac{17}{6}} - 1 \approx 0.683$

Γ: $G_{\max} = \sqrt{\dfrac{43}{6}} - 2 \approx 0.677$ Δ: $G_{\max} = \sqrt{\dfrac{27}{2}} - 3 \approx 0.674$

(β) Το ελάχιστο ασφάλιστρο, $H_{\min}$, που μπορεί να δεχθεί η εταιρεία για ολική κάλυψη της ζημιάς X είναι:

Α: $H_{\min} = \dfrac{1}{4} \log\left(\dfrac{1 + 3e^4}{8}\right) \approx 0.756$ Β: $H_{\min} = \dfrac{1}{3} \log\left(\dfrac{2(1 + 2e^3)}{9}\right) \approx 0.738$

Γ: $H_{\min} = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1 + e^2}{2}\right) \approx 0.717$ Δ: $H_{\min} = \log(2) \approx 0.693$

(γ) Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική; Α: ΝΑΙ Β: ΟΧΙ

Θέμα 3ο. Η $u(w)$ συμβολίζει την ωφελιμοσυνάρτηση του υποψήφιου ασφαλιζόμενου με κεφάλαιο w, η ζημιά $X \geq 0$ είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu > 0$, και $p \in (0,1)$, $d \in (0, \mu)$. Ο ασφαλιζόμενος θα διαλέξει μερική κάλυψη της μορφής $J_p(X) = pX$ (αναλογική κάλυψη) ή $I_d(X) = \max\{0, X - d\}$ (υπερβάλοντος ζημιάς), καταβάλοντας, και στις δύο περιπτώσεις, ασφάλιστρο ίσο με $G = \mathbb{E}[I_d(X)] = \mathbb{E}[J_p(X)]$. (Τα G, p, d είναι σταθερές τέτοιες ώστε να ισχύει η σχέση $0 < G = \mathbb{E}[I_d(X)] = \mathbb{E}[J_p(X)] < \mu$). Φυσικά, μπορεί και να μην διαλέξει κάποια ασφάλιση.

(α) Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις θα προτείνατε να προχωρήσει ο ασφαλιζόμενος στην κάλυψη $I_d(X)$;

Α: Όταν $\mathbb{E}[u(w - G - (X - J_p(X))] < \mathbb{E}[u(w - G - (X - I_d(X))] < \mathbb{E}[u(w - X)]$

Β: Όταν $\mathbb{E}[u(w - X)] < \mathbb{E}[u(w - G - (X - J_p(X))] < \mathbb{E}[u(w - G - (X - I_d(X))]$

Γ: Όταν $\mathbb{E}[u(w - G - (X - I_d(X))] < \mathbb{E}[u(w - X)] < \mathbb{E}[u(w - G - (X - J_p(X))]$

Δ: Όταν $\mathbb{E}[u(w - G - (X - I_d(X))] < \mathbb{E}[u(w - G - (X - J_p(X))] < \mathbb{E}[u(w - X)]$

(β) Ισχύει πάντα η ανισότητα

Α: $\mathrm{Var}[X - J_p(X)] \leq \mathrm{Var}[X - I_d(X)]$ Β: $\mathrm{Var}[X - I_d(X)] \leq \mathrm{Var}[X - J_p(X)]$

Γ: $\mathrm{Var}[J_p(X)] \leq \mathrm{Var}[I_d(X)]$ Δ: $\mathrm{Var}[I_d(X)] \leq \mathrm{Var}[J_p(X)]$

Θέμα 4ο. Στο συλλογικό μοντέλο κινδύνου μιας περιόδου, έστω $S = X_1 + \cdots + X_N$ η συνολική ζημιά της εταιρείας, όπου το πλήθος ζημιών N είναι Poisson(λ) τυχαία μεταβλητή, στοχαστικά ανεξάρτητη από τις ατομικές ζημιές X_i, $i = 1, 2, \ldots$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}[X_i = x] = \frac{x}{14}, \quad x = 2, 3, 4, 5 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Είναι γνωστό ότι $\mathrm{Var}(S) = 448$.

(α) Η σταθερά λ ισούται με

Α: $\lambda = 7$ Β: $\lambda = 14$ Γ: $\lambda = 21$ Δ: $\lambda = 28$

(β) Η μέση τιμή, $\mathbb{E}(S)$, της S, ισούται με

Α: $\mathbb{E}(S) = 27$ Β: $\mathbb{E}(S) = 54$ Γ: $\mathbb{E}(S) = 81$ Δ: $\mathbb{E}(S) = 108$

(γ) Αν οι X_i έχουν πιθανογεννήτρια $P_{X_i}(u) = \mathbb{E}[u^{X_i}] = P(u)$ και ροπογεννήτρια $M_{X_i}(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i}] = M(t) = P(e^t)$, τότε η πιθανογεννήτρια της S είναι

Α: $\exp(\lambda(M(t) - 1))$ Β: $\exp(\lambda(P(u) - 1))$ Γ: $\exp(-\lambda(M(t) - 1))$

Δ: $\exp(-\lambda(P(u) - 1))$

Θέμα 5ο. Το $i > 0$ συμβολίζει το (σταθερό) επιτόκιο της ανατοκιστικής περιόδου. Θέτουμε $v = (1+i)^{-1}$, $d = iv = 1 - v$ και $\delta = \log(1+i)$.

(α) Η παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων είναι

A: $\dfrac{1-v^n}{i}$ B: $\dfrac{1-v^n}{\delta}$ Γ: $\dfrac{1-v^n}{d}$

(β) Η μέλλουσα (συσσωρευμένη την στιγμή n) αξία συνεχούς ράντας n περιόδων είναι

A: $\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ B: $\dfrac{(1+i)^n-1}{\delta}$ Γ: $\dfrac{(1+i)^n-1}{d}$

(γ) Ισχύει ότι $\dfrac{(1+i)^n-1}{i} < \dfrac{(1+i)^n-1}{\delta} < \dfrac{(1+i)^n-1}{d}$; A: ΝΑΙ B: ΟΧΙ

Θέμα 6ο. Τα τυχαία ετήσια επιτόκια $I_1, I_2, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθένα με μέση τιμή $\mu > 0$ και διασπορά $\sigma^2 > 0$.

(α) Η μέση τιμή της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη είναι

A: $\dfrac{(1+\mu)^n-1}{\mu}$ B: $(1+\mu)^n$ Γ: $\dfrac{1-(1+\mu)^{-n}}{\mu}$ Δ: $((1+\mu)^2+\sigma^2)^n-(1+\mu)^{2n}$

(β) Η διασπορά της μέλλουσας αξίας της μονάδας μετά από n έτη είναι

A: $\dfrac{(1+\mu)^n-1}{\mu}$ B: $(1+\mu)^n$ Γ: $\dfrac{1-(1+\mu)^{-n}}{\mu}$ Δ: $((1+\mu)^2+\sigma^2)^n-(1+\mu)^{2n}$

(γ) Η μέση συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων είναι

A: $\dfrac{(1+\mu)^n-1}{\mu}$ B: $(1+\mu)^n$ Γ: $\dfrac{1-(1+\mu)^{-n}}{\mu}$ Δ: $((1+\mu)^2+\sigma^2)^n-(1+\mu)^{2n}$

Θέμα 7ο. Η ένταση θνησιμότητας ατόμου ηλικίας x είναι

$$\mu_x = \frac{x}{50(x+50)}, \quad x \geq 0.$$

Για τυχόν $x \geq 0$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x, δηλαδή του (x).

(α) Η συνάρτηση επιβίωσης, $s(x)$, είναι

A: $\left(1+\dfrac{x}{50}\right)e^{x/50}$ B: $\left(1-\dfrac{x}{50}\right)e^{x/50}$ Γ: $\left(1+\dfrac{x}{50}\right)e^{-x/50}$ Δ: $\left(1-\dfrac{x}{50}\right)e^{-x/50}$

(β) Η πιθανότητα ${}_tp_x$ όπως ο (x) επιβιώσει για t ακόμη έτη είναι

A: $\left(1+\dfrac{t}{50+x}\right)e^{t/50}$ B: $\left(1-\dfrac{t}{50+x}\right)e^{-t/50}$

Γ: $\left(1+\dfrac{t}{50+x}\right)e^{-t/50}$ Δ: $\left(1-\dfrac{t}{50+x}\right)e^{t/50}$

(γ) Η μέση υπόλοιπη ζωή, $\mathbb{E}[T_x]$, του (x), είναι

A: $50-\dfrac{2500}{50+x}$ B: $50+\dfrac{2500}{50+x}$ Γ: $\dfrac{2500}{50+x}$ Δ: $\dfrac{50+x}{50}$
