

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2005

Θέμα 1. Η πιθανότητα να εμπλακεί σε ατύχημα ένα προς ασφάλιση αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι p (με $0 < p < 1$), και το ύψος της οικονομικής ζημιάς που επέρχεται στην περίπτωση ατυχήματος είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$. Ο ιδιοκτήτης έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - e^{-aw}$, και η ασφαλιστική εταιρεία $u_I(w) = 1 - e^{-bw}$, με a, b θετικές σταθερές. Να προσδιοριστεί (α) το μέγιστο καταβλητέο ασφάλιστρο G_{\max} για τον ιδιοκτήτη, και (β) το ελάχιστο δεκτό ασφάλιστρο H_{\min} για την ασφαλιστική εταιρεία, συναρτήσει των παραμέτρων a, b, p . (γ) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να πληρούν τα a, b και p για να υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική.

Θέμα 2. Η συνολική αποζημίωση που θα καταβάλει μια εταιρεία που καλύπτει δύο κατηγορίες κινδύνων είναι $S_\nu = \sum_{i=1}^{N_1} X_i + \sum_{j=1}^{N_2} Y_j$, όπου οι τυχαίες μεταβλητές $N_1, N_2, X_i, i \geq 1, Y_j, j \geq 1$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, οι N_1 και N_2 είναι Poisson(ν), και οι τυχαίες μεταβλητές X_i της πρώτης κατηγορίας κινδύνου έχουν συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{10}, \quad x = 1, 2, \dots, 10, \quad i = 1, 2, \dots,$$

ενώ οι τυχαίες μεταβλητές Y_j της δεύτερης κατηγορίας κινδύνου έχουν συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{Y_j}(y) = \frac{1}{5}, \quad y = 1, 2, \dots, 5, \quad j = 1, 2, \dots$$

Υποθέτουμε ότι η εταιρεία λαμβάνει ασφάλιστρο ίσο με 5.5 για κάθε ζημιά $X_i, i = 1, \dots, N_1$, και ίσο με 3 για κάθε ζημιά $Y_j, j = 1, \dots, N_2$, που καλύπτει.

(α) Αποδείξτε ότι η S_ν είναι σύνθετη Poisson($\lambda, f(k)$), και προσδιορίστε τη σταθερά λ και την συνάρτηση πιθανότητας $f(k)$ των ατομικών ζημιών.

(β) Αποδείξτε ότι και το καθαρό κέρδος της εταιρείας ακολουθεί σύνθετη Poisson, και βρείτε το μέσο κέρδος της εταιρείας καθώς και τη διασπορά του κέρδους (συναρτήσει του ν).

(γ) Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση (για $\nu \rightarrow \infty$) την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία (αφού ελέγξετε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες για την εφαρμογή του κεντρικού οριακού θεωρήματος στη συγκεκριμένη περίπτωση).

Θέμα 3. Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού A είναι $\mu_1(x) = a/x, x > 0$, ενώ για τον πληθυσμό B είναι $\mu_2(x) = a/x + \theta, x > 0$, όπου a και θ είναι θετικές σταθερές. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ${}_{10}p_{30}^{(1)}$ όπως ένας τριαντάρης του πληθυσμού A επιβιώσει για άλλα 10 έτη είναι 9/16, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα ${}_{10}p_{30}^{(2)}$ για τους τριαντάρηδες του πληθυσμού B είναι η μισή, 9/32. Να βρείτε (α) τη σταθερά θ , (β) τη σταθερά a , και (γ) τη μέση υπόλοιπη ζωή των τριαντάρηδων του πληθυσμού A.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!