A

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2004

Θέμα 1. Άτομο με ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = w^{1/3}$ και κεφάλαιο $w = 10000$ (Ευρώ), σκέπτεται να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη $I(X)$ ζημιάς X με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 100)$, διαθέτοντας ασφάλιστρο $G = 20$. Η πολιτική της ασφαλιστικής εταιρείας σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να επιβαρύνει τον ασφαλιζόμενο κατά $\theta = 25\%$ της μέσης κάλυψης, δηλαδή καθορίζει το ασφάλιστρο ως

$$G = (1+\theta)\,\mathbb{E}[I(X)] = \frac{5}{4}\mathbb{E}[I(X)].$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά d αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει σε μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς της μορφής $I(X) = I_d(X) = \max\{0, X-d\}$. (β) Υπολογίστε τη σταθερά p αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει σε αναλογική κάλυψη της μορφής $I(X) = J_p(X) = pX$. (γ) Υπολογίστε τη μέση ωφέλεια του υποψήφιου ασφαλιζόμενου αν προχωρήσει στην κάλυψη $I_d(X)$, με d όπως στο ερώτημα (α), και αν δεν προχωρήσει σε κάλυψη της ζημιάς.

Θέμα 2. Η πιθανότητα ατυχήματος σε καθένα από 1000 πλοία που ασφαλίζει μια ασφαλιστική εταιρεία είναι 3/10, το δε ύψος αποζημίωσης σε καθένα από αυτά (αν συμβεί ζημιά) είναι τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

Η εταιρεία λαμβάνει ασφάλιστρο ίσο με 0.2 για κάθε πλοίο που ασφαλίζει (όλα τα ποσά είναι σε εκατ. Ευρώ). Έστω S η συνολική αποζημίωση που θα καταβληθεί. Να υπολογιστούν (α) η μέση αποζημίωση $\mathbb{E}(S)$ που θα καταβάλει η εταιρεία, (β) η διασπορά $\mathrm{Var}(S)$, και (γ) η πιθανότητα (κατά προσέγγιση) να ζημιωθεί η εταιρεία. [**Σημείωση:** Να αναφερθούν όλες οι υποθέσεις όποιου θεωρήματος χρησιμοποιηθεί στο ερώτημα (γ), και να ελεγχθεί η ισχύς τους.]

Θέμα 3. Τα τυχαία ετήσια επιτόκια $I_1, I_2, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθένα με πυκνότητα

$$f(i) = 200i, \quad 0 < i < 1/10.$$

Να υπολογιστούν (α)η πυκνότητα $g(\delta)$ των αντιστοίχων εντάσεων ανατοκισμού $\Delta_j = \log(1+I_j),\ j = 1, 2, \ldots, n$,
(β) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη, και
(γ) η μέση συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων.

Θέμα 4. Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού στο ηλικιακό διάστημα $[30, 49]$ είναι $\mu_x = 1/x,\ 30 \le x \le 49$.
(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ${}_{19}p_{30}$ όπως ο τριαντάρης επιζήσει άλλα 19 έτη.
(β) Αν ένας συγκεκριμένος τριαντάρης έχει διπλάσια ένταση θνησιμότητας (από τον υπόλοιπο πληθυσμό) στο ηλικιακό διάστημα $[30, 36]$ (δηλ. $2/x$) και ημιδιπλάσια στο $[36, 49]$ (δηλ. $1/(2x)$), είναι πιο πιθανό να επιζήσει πέραν της ηλικίας των 49 ετών από ότι τα άλλα άτομα του πληθυσμού;

ΓΡΑΨΤΕ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!