ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2003

Θέμα 1. Η ένταση Y του μεγαλύτερου σεισμού που πραγματοποιείται στην Αθήνα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(0,8)$, η δε οικονομική ζημιά X (σε εκατομμύρια Ευρώ) που επέρχεται στο Δήμο της Αθήνας είναι συνάρτηση της έντασης Y, και συγκεκριμένα

$$X = g(Y) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad 0 < Y \leq 3, \\ Y - 3, & \text{αν} \quad 3 \leq Y < 8. \end{cases}$$

Ο Δήμος έχει αποθεματικό κεφάλαιο $w = 9$ (εκατ. Ευρώ) και η Δήμαρχος υπολογίζει ότι η ωφελιμοσυνάρτηση των δημοτών είναι $u(w) = \sqrt{w}$.
(α) Προσδιορίστε το μέγιστο ασφάλιστρο $G_{\max}$ που μπορεί να δεχθεί η Δήμαρχος για ολική κάλυψη της ζημιάς X.
(β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει κεφάλαιο $w_0 = 100$ (εκατ. Ευρώ) και ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/20}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο $H_{\min}$ που θα απαιτήσει από το Δήμο για κάλυψη της παραπάνω ζημιάς; Υπάρχει ασφαλιστική πολιτική;
(γ) Αν η Δήμαρχος προχωρήσει στην κάλυψη του κινδύνου με ασφάλιστρο $G = G_{\max}$ (όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα (α)), υπολογίστε το μέσο κέρδος της εταιρείας, καθώς και την πιθανότητα να ζημιώσει η εταιρεία.

Θέμα 2. Έστω $S = (X_1 + \cdots + X_{N_1}) + (Y_1 + \cdots + Y_{N_2})$ η συνολική αποζημίωση που θα πληρώσει μια εταιρεία, όπου όλες οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i \geq 1$, Y_j, $j \geq 1$, N_1 και N_2 είναι ανεξάρτητες, και η N_κ έχει κατανομή $\text{Poisson}(\lambda_\kappa)$, $\kappa = 1, 2$. Επίσης υποθέτουμε ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες $\text{Bernoulli}(p)$ (δηλαδή $\mathbb{P}[X_i = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X_i = 0]$) και οι Y_j είναι ανεξάρτητες Εκθετικές $E(\theta)$ (δηλαδή με πυκνότητα $f_{Y_j}(y) = \theta e^{-\theta y}$, $y > 0$), όπου p, θ, λ_1, λ_2 γνωστές θετικές σταθερές (με $0 < p < 1$).
(α) Αποδείξτε ότι η S είναι σύνθετη $\text{Poisson}(\lambda, F(x))$ και προσδιορίστε τη σταθερά λ και την συνάρτηση κατανομής $F(x)$ των ατομικών ζημιών.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και την διασπορά της S, καθώς και τη ροπογεννήτρια της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα.
(γ) Εάν $\lambda_1 = \lambda_1(\nu) = 2\nu$ και $\lambda_2 = \lambda_2(\nu) = 3\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ των ατομικών ζημιών (που υπολογίσατε στο ερώτημα (β)) δεν εξαρτάται από το ν, και εξετάστε αν και με ποιον τρόπο μπορεί να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την $S = S_\nu$ όταν το $\nu \to \infty$.

Θέμα 3. Κάποιος έλαβε δάνειο $P = 10000$ (Ευρώ) με επιτόκιο 6% το χρόνο, το οποίο θα αποπληρωθεί σε $n = 40$ ληξιπρόθεσμες μηνιαίες δόσεις.
(α) Υπολογίστε τη μηνιαία δόση R.
(β) Αν επιθυμεί τους πρώτους 20 μήνες να πληρώνει διπλάσια δόση από ότι τους τελευταίους 20, ποια πρέπει να είναι η δόση για τους πρώτους 20 μήνες και ποια για τους τελευταίους 20;
(γ) Αν επιθυμεί τους πρώτους 20 μήνες να πληρώνει μισή δόση από ότι τους τελευταίους 20, ποια πρέπει να είναι η δόση για τους πρώτους 20 μήνες και ποια για τους τελευταίους 20;

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!