

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2002

Θέμα 1. Άτομο με ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - \exp(-2w)$, $w \geq 0$, πρόκειται να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη ζημιάς Q με πυκνότητα $f(x) = 4 \exp(-4x)$, $x \geq 0$. Ο ασφαλιστής του προτείνει μερική κάλυψη της μορφής

$$I_d(X) = \max\{0, X - d\} = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq X \leq d, \\ X - d, & \text{αν } X \geq d, \end{cases}$$

όπου $d \geq 0$ προσδιοριστέα σταθερά. Ο υποψήφιος ασφαλισμένος διαθέτει ποσό $G = \frac{1}{2} \log\left(\frac{3}{2}\right)$ ως ασφάλιστρο για την παραπάνω μερική κάλυψη της ζημιάς. (α) Προσδιορίστε τη σταθερά d έτσι ώστε η μέση ωφέλεια του ασφαλιζόμενου να είναι ίση, με ή χωρίς κάλυψη του κινδύνου. (β) Ποια η πιθανότητα ο ασφαλισμένος να πληρώσει τελικά ασφάλιστρο μεγαλύτερο της κάλυψης που θα του παράσχει η εταιρεία; (γ) Ποιο το μέσο κέρδος της εταιρείας αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει στην κάλυψη του παραπάνω κινδύνου;

Θέμα 2. Έστω $S = X_1 + \dots + X_N$ η συνολική ζημιά της εταιρείας, όπου το πλήθος ζημιών N έχει συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}[N = 0] = \mathbb{P}[N = a] = \mathbb{P}[N = 2a] = 1/3$, όπου $a \in \{1, 2, \dots\}$, στοχαστικά ανεξάρτητη από τις ατομικές ζημιές X_i , $i = 1, 2, \dots$, ο οποίες είναι ανεξάρτητες $\Gamma(1/a, b)$, δηλαδή έχουν πυκνότητα

$$f_{X_i}(x) = \frac{b^{1/a}}{\Gamma(1/a)} x^{(1/a)-1} \exp(-bx), \quad x > 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

όπου a όπως πριν και $b > 0$. (α) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της S , $M(t) = \mathbb{E}[\exp(tS)]$, για όποια t ορίζεται, και δείξτε ότι η κατανομή της S δεν εξαρτάται από το a . (β) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}(S)$ και τη διασπορά $\text{Var}(S)$ της S . (γ) Εξετάστε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα καθώς το $a \rightarrow \infty$.

Θέμα 3. Κάποιος έλαβε δάνειο $P = 10000$ (Ευρώ) με επιτόκιο 6% το χρόνο, το οποίο θα αποπληρωθεί σε $n = 70$ ληξιπρόθεσμες μηνιαίες δόσεις. (α) Υπολογίστε την ονομαστική αξία της μηνιαίας δόσης R . (β) Αν συμφωνήσει για τους πρώτους 30 μήνες να πληρώνει δόσεις ονομαστικής αξίας 50 Ευρώ, ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία των επομένων 40 δόσεων; (γ) Υπολογίστε ποια είναι η ονομαστική αξία του εναπομείναντος χρέους κατά την λήξη του 30ου μήνα, στα (α) και (β).

Θέμα 4. Η θνησιμότητα ατόμου ηλικίας x είναι $\mu_x = b/(a - x)$, $0 \leq x \leq a$, όπου $a > 0$ και $b > 0$. Για τυχόν x , με $a < x < b$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x . Υπολογίστε (α) τη συνάρτηση επιβίωσης $s(x)$, (β) τη μέση υπόλοιπη ζωή, $\mathbb{E}[T_x]$, ατόμου ηλικίας x και (γ) τη διασπορά, $\text{Var}[T_x]$, της υπόλοιπης ζωής του. (δ) Υπολογίστε τη σχέση που ικανοποιούν οι παράμετροι a και b αν είναι γνωστό ότι $2 \text{Var}[T_x] = (\mathbb{E}[T_x])^2$ για κάθε $x \in (0, a)$.

ΓΡΑΨΤΕ 3 ΑΠΟ ΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2½ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!