ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, Φεβρουάριος 2001

Θέμα 1ο. Άτομο με κεφάλαιο $w > 0$ και εκθετική ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - \exp(-w)$, σκέπτεται να ασφαλιστεί για ολική ή μερική κάλυψη ζημιάς X με εκθετική πυκνότητα $f_X(x) = \theta \exp(-\theta x), \quad x > 0$ (όπου η παράμετρος $\theta > 1$). Να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου θ σε καθεμιά από τις εξής περιπτώσεις:

(α) Αν είναι γνωστό ότι το μέγιστο ασφάλιστρο που δέχεται να πληρώσει ο ασφαλισμένος για **ολική κάλυψη** της ζημιάς είναι $G = 2$.

(β) Αν δέχεται να πληρώσει ασφάλιστρο $P = 1/(2\theta)$ για **μερική κάλυψη** της ζημιάς της μορφής $I_{1/10}(X) = \max\{0, X - 1/10\}$.

Θέμα 2ο. Η πιθανότητα ατυχήματος (μέσα σε ένα μήνα) για καθένα από 10000 ασφαλισμένα αυτοκίνητα μιας εταιρείας είναι $1/100$, το δε ύψος κάθε ζημιάς (σε εκατ. δραχμές) αν συμβεί ατύχημα, ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,2)$. Έστω S το συνολικό ύψος αποζημιώσεων που θα καταβάλει η εταιρεία τον επόμενο μήνα. Αν το ασφάλιστρο ανά αυτοκίνητο έχει καθοριστεί ως

$$G = \frac{\mathrm{E}(S) + 3\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{10000},$$

(α) να υπολογίσετε το G, και

(β) την πιθανότητα (κατά προσέγγιση) όπως ζημιωθεί η εταιρεία τον επόμενο μήνα (δίνεται ότι $\Phi(3) = 99.87\%$).

[Υπόδειξη για το (β): Θεωρήστε μια ακολουθία N_n διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών $b(n^2, 1/n)$, και αποδείξτε ότι $N_n/n \to 1$ κατά πιθανότητα, καθώς το $n \to \infty$.]

Θέμα 3ο. Κάποιος αγόρασε αυτοκίνητο αξίας 10000 (Ευρώ) και συμφώνησε να το πληρώσει με (ληξιπρόθεσμες) μηνιαίες δόσεις και με επιτόκιο $i = 1\%$ το μήνα.

(α) Τι ποσό πρέπει να πληρώνει κάθε μήνα ώστε να ξεχρεώσει σε 3 έτη (36 μήνες);

(β) Πόσους μήνες θα κάνει να ξεχρεώσει αν μπορεί να πληρώνει μόνο 200 Ευρώ το μήνα;

(γ) Αν υποθέσουμε ότι στο τέλος κάθε περιττού μήνα ($1,3,\cdots,35$) μπορεί να πληρώνει 200 Ευρώ, τι ποσό πρέπει να πληρώνει στο τέλος κάθε άρτιου μήνα ($2,4,\cdots,36$), ώστε να ξεχρεώσει σε 3 έτη;

Θέμα 4ο. Η θνησιμότητα των ατόμων ενός πληθυσμού είναι $\mu_x = 1/(1+x)$, για $x > 0$.

(α) Βρείτε την πιθανότητα q_{50} όπως άτομο ηλικίας 50 ετών πεθάνει μέσα σε ένα έτος.

(β) Αν για ένα συγκεκριμένο άτομο 50 ετών γνωρίζουμε ότι στο ηλικιακό διάστημα $[50,51]$ θα υποβληθεί σε επιπλέον κίνδυνο που αντανακλάται από το γεγονός ότι η θνησιμότητά του αυξάνεται από $\mu_x = 1/(1+x)$ σε $\tilde{\mu}_x = \alpha/(1+x)$ για $x \in [50,51]$ (όπου $\alpha > 1$), για ποια τιμή του α η q_{50} του εν λόγω ατόμου είναι διπλάσια από τα υπόλοιπα άτομα του πληθυσμού;

Γράψτε ακριβώς 3 από τα 4 σε $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.