ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1. Θυμάμαι ότι σε ακριβώς 2 από τα n συρτάρια μου έχω φυλάξει από ένα 10-ευρω, αλλά δεν θυμάμαι σε ποια ακριβώς (τα υπόλοιπα συρτάρια είναι άδεια). Ανοίγω ένα-ένα τα συρτάρια μέχρι να βρω το πρώτο 10-ευρω.
(α) Για $k = 1, 2, \ldots, n-1$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου A_k όπως βρω το 10-ευρω στην k δοκιμή.
(β) Κατά μέσο όρο πόσα συρτάρια θα ανοίξω;

Θέμα 2. Από μία συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα εξάγουμε διαδοχικά και χωρίς επανάθεση 5 φύλλα στην τύχη.
(α) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι 4 άσοι;
(β) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστούν 3 άσοι και 2 ρηγάδες;
(γ) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί και άσος και ρήγας και ντάμα από τουλάχιστον μία φορά;

Θέμα 3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{40}$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $\nu = 40$ από την Poisson με παράμετρο $\lambda = 4$.
(α) Να βρείτε ένα άνω φράγμα για την $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{40} \geq 200)$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov.
(β) Να βρείτε μία προσέγγιση για την $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{40} \geq 200)$, χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.
(γ) Αν αντί της παραμέτρου $\lambda = 4$ είχαμε μια άγνωστη τιμή, έστω $\lambda = \theta$, να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης περίπου 90% για το θ, υποθέτοντας ότι από τις παρατηρήσεις έχουμε λάβει τις τιμές $\sum_{i=1}^{40} X_i = 120$ και $\sum_{i=1}^{40} X_i^2 = 276$. Επίσης να εξετάσετε αν προκύπτουν σημαντικά στοιχεία από τα δεδομένα αυτά ώστε να συμπεράνουμε ότι $\theta < 4$, σε επίπεδο σημαντικότητας περίπου 5%.

Θέμα 4. (α) Σε δύο εξεταστικές περιόδους (για ένα μάθημα) εξετάστηκαν 120 και 60 φοιτητές, αντίστοιχα, και πέρασαν το μάθημα 60 και 24, αντίστοιχα. Να εξεταστεί αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικά στοιχεία ότι η πιθανότητα επιτυχίας είναι μεγαλύτερη στην πρώτη περίοδο ($\alpha = 5\%$).
(β) Θεωρούμε ότι δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, X_2, \ldots, X_8$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ έχουν κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma^2)$ και $N(\mu_2, \sigma^2)$, όπου οι πληθυσμιακοί μέσοι μ_1, μ_2 θεωρούνται άγνωστοι, όπως και η πληθυσμιακή διασπορά σ^2, η οποία επιπροσθέτως υποτίθεται κοινή στους δύο πληθυσμούς. Αν από τα δεδομένα προέκυψε ότι $\sum_{i=1}^{8} X_i = 96$, $\sum_{i=1}^{8} X_i^2 = 1194$, $\sum_{j=1}^{5} Y_j = 50$ και $\sum_{j=1}^{5} Y_j^2 = 504$, να κατασκευαστεί διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού εμπιστοσύνης 95% για το $\mu_1 - \mu_2$. Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$;

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ Ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!