ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2005

Θέμα 1. (α) Από μία συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα εξάγουμε διαδοχικά και χωρίς επανάθεση 8 φύλλα στην τύχη. (i) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον ένας άσος; (ii) Πόσοι άσοι θα εμφανιστούν κατά μέσον όρο; (iii) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί και άσος και ρήγας;
(β) Από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, \nu$ διαλέγουμε έναν αριθμό, έστω X, στην τύχη, και στη συνέχεια από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, X$ διαλέγουμε έναν αριθμό, έστω Y, στην τύχη. (i) Ποια η πιθανότητα ο Y να είναι 1; (ii) Αν είναι γνωστό ότι $Y = 1$, ποια η πιθανότητα ο X (της πρώτης κλήρωσης) να ήταν 1;

Θέμα 2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν από την πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1-x}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

(α) Να βρείτε ακολουθίες σταθερών $\alpha_\nu \in \mathbb{R}$ και $\beta_\nu > 0$ για τις οποίες ισχύει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_\nu - \alpha_\nu}{\beta_\nu} \le x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz,$$

όπου $S_\nu = X_1 + \ldots + X_\nu$.
(β) Να βρείτε ακολουθίες σταθερών $\gamma_\nu \in \mathbb{R}$ και $\delta_\nu > 0$ για τις οποίες ισχύει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S'_\nu - \gamma_\nu}{\delta_\nu} \le x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz,$$

όπου $S'_\nu = |X_1| + \ldots + |X_\nu|$.

Θέμα 3. (α) Ο ιός της γρίππης σε δύο μεγάλες πόλεις A και B συναντάται σε άγνωστα ποσοστά p_A, p_B, αντίστοιχα. Διαλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους $\nu_A = 200$ και $\nu_B = 400$ ατόμων από τις δύο πόλεις, και παρατηρούμε ότι οι νοσούντες (από γρίππη) στα δύο δείγματα είναι 50 και 80, αντίστοιχα. Από τα παραπάνω δεδομένα, έχουμε αρκετά σημαντικά στοιχεία ώστε να αποφανθούμε ότι στην πόλη A είναι πιο διαδεδομένη η γρίππη απ᾽ ότι στην B σε επίπεδο σημαντικότητος $\alpha = 5\%$;
(β) Θεωρούμε ότι δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, X_2, \ldots, X_8$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ έχουν κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma^2)$ και $N(\mu_2, \sigma^2)$, όπου οι πληθυσμιακοί μέσοι μ_1, μ_2 θεωρούνται άγνωστοι, όπως και η πληθυσμιακή διασπορά σ^2, η οποία επιπροσθέτως υποτίθεται κοινή στους δύο πληθυσμούς. Αν από τα δεδομένα προέκυψε ότι $\sum_{i=1}^{8} X_i = 96$, $\sum_{i=1}^{8} X_i^2 = 1194$, $\sum_{j=1}^{5} Y_j = 50$ και $\sum_{j=1}^{5} Y_j^2 = 504$, να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητος $\alpha = 10\%$ η υπόθεση

$$H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \quad \text{έναντι της} \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ Ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!