ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2004

Θέμα 1. Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει μια εταιρεία προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 25 λαμπτήρων. Από ένα χαρτοκιβώτιο, που περιέχει 2 ελλατωματικούς λαμπτήρες, εξάγονται, χωρίς επανάθεση, 3 λαμπτήρες. Έστω A_n το ενδεχόμενο εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα στη $n-$οστή εξαγωγή, $n = 1, 2, 3$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A_2)$, $P(A_1|A_2)$, $P(A_2 - A_1)$ και $P(A_3)$.

Θέμα 2. (A) Μηχανή κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος (σε χιλιοστά του μέτρου) ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 40$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$. Αν το μήκος μιας βίδας είναι εκτός του διαστήματος $[39, 41]$, η βίδα θεωρείται ελαττωματική. Να υπολογίσετε (α) το ποσοστό ελαττωματικών βιδών που παράγει η μηχανή, (β) την πιθανότητα όπως σε 3 τυχαία επιλεγμένες βίδες η μία είναι ελαττωματική, και (γ) την πιθανότητα όπως το συνολικό μήκος 100 βιδών είναι τουλάχιστον 4000.
(B) Αν οι παράμετροι μ και σ^2 της παραπάνω Κανονικής κατανομής ήταν άγνωστοι, και ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$ βιδών έδωσε δειγματικό μέσο $\bar{X} = 40.7$ και δειγματική διασπορά $S^2 = 1.21$, τι θα αποφασίζατε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05 = 5\%$ για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \mu = 40$ έναντι της εναλλακτικής $H_1 : \mu \neq 40$; Να περιγράψετε πλήρως το συμπέρασμα που προκύπτει στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Θέμα 3. (A) Ο χρόνος ζωής X σε ώρες μιας λυχνίας ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{200} \exp(-x/200), \quad x > 0.$$

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > 140)$ όπως μια λυχνία εξακολουθεί να λειτουργεί μετά από 140 ώρες. (β) Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως από 100 λυχνίες που εκλέγονται τυχαία, 60 τουλάχιστον θα επιζήσουν των 140 ωρών. (γ) Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$ των 100 τυχαία επιλεγμένων λυχνιών είναι το πολύ 200 ώρες, δηλ. την $P(\bar{X} \leq 200)$.
(B) Υποθέτουμε ότι $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ είναι οι χρόνοι ζωής από $n_1 = 100$ τυχαία επιλεγμένες λυχνίες ενός εργοστασίου που ακολουθούν Εκθετική με πυκνότητα

$$f_1(x) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x), \quad x > 0,$$

και ότι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{200}$ είναι οι χρόνοι ζωής από $n_2 = 200$ τυχαία επιλεγμένες λυχνίες ενός άλλου εργοστασίου που ακολουθούν Εκθετική με πυκνότητα

$$f_2(x) = \lambda_2 \exp(-\lambda_2 x), \quad x > 0,$$

όπου $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 > 0$ είναι άγνωστες παράμετροι. Αν οι αντίστοιχες στατιστικές συναρτήσεις έλαβαν τις τιμές $\bar{X} = 200$, $S_1^2 = 41000$ και $\bar{Y} = 320$, $S_2^2 = 98000$, να διατυπώσετε και να πραγματοποιήσετε κατάλληλο στατιστικό έλεγχο συναρτήσει των άγνωστων παραμέτρων λ_1 και λ_2, ο οποιος θα σας επιτρέψει (αν σας επιτρέψει) να διακρίνετε με πιθανότητα σφάλματος το πολύ $0.01 = 1\%$ ποιο εργοστάσιο παράγει τις καλύτερες (δηλ. τις πιο αξιόπιστες–εκείνες που έχουν μεγαλύτερη μέση διάρκεια ζωής) λυχνίες.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ Ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!