

## ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2002

**Θέμα 1.** Σε αγώνα volley-ball διεξάγονται διαδοχικά set στα οποία κερδίζει η ομάδα που πετυχαίνει πρώτη 3 νίκες. Υποθέτουμε ότι η ομάδα A κερδίζει ένα σετ από την B με πιθανότητα  $2/3$ , και χάνει με πιθανότητα  $1/3$ . Επίσης υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα σε κάθε set είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα set.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει τον αγώνα η ομάδα A.

(β) Έστω  $X$  η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον συνολικό αριθμό των set που θα πραγματοποιηθούν. Υπολογίστε τις ποσότητες  $\mu = E(X)$  και  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ , και εξηγήστε τι ακριβώς παριστάνει η τιμή  $\mu$  για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

(γ) Αν είστε οπαδός της ομάδας A, θα προτιμούσατε να μάθετε ότι  $X = 3$  (δηλαδή, ότι ο αγώνας θα λήξει 3-0 ή 0-3).

**Θέμα 2.** Το ημερήσιο κέρδος  $X$  ενός χαρτοπαίκτη σε Ευρώ είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $(-c, 2c)$ , όπου  $c > 0$  (εδώ αρνητικό κέρδος σημαίνει ζημιά).

(α) Να υπολογιστεί το  $c$  αν είναι γνωστό ότι  $E(X^4) = 1375$ .

(β) Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής  $Y = X^2$ .

(γ) Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα όπως το συνολικό κέρδος του χαρτοπαίκτη μετά από 100 ημέρες είναι τουλάχιστον 250 Ευρώ.

**Θέμα 3.** Ένα παιδί μιας οικογένειας γεννιέται αγόρι ή κορίτσι με πιθανότητα  $1/2$ , ανεξάρτητα από το φύλο των υπολοίπων παιδιών. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια έχει  $n$  παιδιά.

(α) Ποια η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον 2 κορίτσια; ( $n \geq 2$ )

(β) Ποια η πιθανότητα να έχει παιδιά και των δύο φύλων; ( $n \geq 2$ )

(γ) Ποια η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον 2 κορίτσια και τουλάχιστον 2 αγόρια; ( $n \geq 4$ )

(δ) Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του  $n$  για την οποία η πιθανότητα στο (α) είναι τουλάχιστον 95%.

(ε) Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του  $n$  για την οποία η πιθανότητα στο (β) είναι τουλάχιστον 95%.

**Θέμα 4.** (α) Αν η τυχαία μεταβλητή  $X$  είναι κανονική με μέσο 0 και διασπορά  $\sigma^2$ , να αποδείξετε ότι η τυχαία μεταβλητή  $Y = X^2$  ακολουθεί Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $\alpha$  και  $\lambda$ , τις οποίες να προσδιορίσετε.

(β) Αν οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  είναι ανεξάρτητες κανονικές  $N(0, \sigma^2)$ , να προσδιορίσετε την κατανομή της

$$S_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2.$$

(γ) Υπολογίστε την  $E(S_n^2)$  καθώς και την διασπορά  $\text{Var}(S_n)$ , και αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n \leq n\sigma^2] = 1/2.$$

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 Ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**