

Όνοματεπώνυμο:

A.M.:

Εξέταση Ιουνίου 2019 στο μάθημα: Στατιστική I

Θέμα 1. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0 \text{ άγνωστο.}$$

- Να βρεθεί ο Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας $\delta = \delta(\underline{X})$ και η εκτιμήτρια ροπών $\tilde{\theta}$ της παραμέτρου θ .
- Να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το $\frac{1}{\theta}$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-a)\%$. (Υπόδειξη: βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = -\log X$)

Θέμα 2. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π

$$f(x; \theta) = e^{\theta-x} I_{[\theta, \infty)}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

- Να εξεταστεί αν η παραπάνω κατανομή με σ.π.π $f(x; \theta)$ ανήκει στην Ε.Ο.Κ.
- Να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ για τη παράμετρο θ .

Θέμα 3.

- Αποδείξτε το ακόλουθο:

Έστω ότι η $f(x; \theta)$ ανήκει στη μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών με σ.π.π ή σ.π. της μορφής

$$f(x; \theta) = \beta(\theta) e^{\eta(\theta)T^*(X)} h(x).$$

Αν η συνάρτηση $\eta(\theta)$ είναι φθίνουσα τότε η f έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφαινομένων με $T(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^n T^*(x_i)$. (n το μέγεθος του δείγματος)

- Έστω ότι ο χρόνος ζωής X ενός λαμπτήρα ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\exp(\theta)$ ($f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, $\theta > 0$). Ο κατασκευαστής δηλώνει ότι ο μέσος χρόνος ζωής μ είναι τουλάχιστον 1800 ώρες. Καταναλωτές παραπονέθηκαν στον κατασκευαστή ότι ο μέσος χρόνος ζωής είναι μικρότερος. Να κατασκευάσετε Ο.Ι.Ε (ελεγχοςυνάρτηση- κρίσιμη περιοχή) για τον έλεγχο $H_0 : \mu \geq 1800$ vs $H_1 : \mu < 1800$. Αν οι Χρόνοι ζωής από ένα δείγμα 10 τέτοιων λαμπτήρων έδωσαν $\bar{X} = 1600$ ώρες, τι συμπέρασμα προκύπτει από τον έλεγχο σε ε.σ.σ. 5 % ;

Δίνονται $X_{10;0.05}^2 = 18.307$, $X_{10;0.025}^2 = 20.483$, $X_{20;0.05}^2 = 31.410$, $X_{10;0.95}^2 = 3.940$, $X_{20;0.95}^2 = 10.851$

Θέμα 4.

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli, $B(1, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

- Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια για το θ και το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramer-Rao.
- Δείξτε ότι για $n = 1$ δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια για την ποσότητα $g(\theta) = \theta^2$.
- Δείξτε ότι για $n = 2$ η συν. $T(\underline{X}) = X_1$ δεν είναι επαρκής για το θ .

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Άριστα είναι το 100 και η βάση το 50. Δικαιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Σκέτα αριθμητικά αποτελέσματα δε γίνονται δεκτά. Η εργασία επίλυσης πρέπει να φαίνεται. Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**