Στατιστική Ι

Εξέταση 14 Φεβρουαρίου 2019

1. Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από την αρνητική διωνυμική με συνάρτηση πιθανότητας $f(x, \theta) = (x+1)\theta^2(1-\theta)^x I_{\{0,1,\dots\}}(x)$, όπου $\theta \in \Theta = (0, 1)$ άγνωστη παράμετρος. Εξετάστε αν η κατανομή αυτή ανήκει στην ΕΟΚ, και υπολογίστε το κάτω φράγμα διασποράς της ανισότητας Cramer-Rao για την παραμετρική συνάρτηση $g(\theta) = 1/\theta$. Τέλος, βρείτε την ΑΟΕΔ εκτιμήτρια της $1/\theta$ δείχνοντας ότι η διασπορά της επιτυγχάνει το κάτω φράγμα Cramer-Rao.

2. Έστω $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$ όπου $n \geq 3$ και $\theta \in \Theta = (-\infty, \infty)$ άγνωστη παράμετρος. Διατυπώστε το θεώρημα Basu, και αποδείξτε μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T = \sum_{i=1}^n X_i$ και $S = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2 - 2X_3}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

3. Έστω $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta_1, \theta_2)$ όπου $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ η διδιάστατη άγνωστη παράμετρος και $n \geq 2$.

(α) Να δειξετε ότι η ΑΟΕΔ της διασποράς θ_2 είναι η $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ και η ΕΜΠ είναι η $\widehat{\theta_2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.

(β) Με βάση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, ποιά εκτιμήτρια από τις παραπάνω προτιμάτε;

4. Υπολογίστε ροποεκτιμήτριες (εκτιμήτριες μεθόδου ροπών – ΕΜΡ) των άγνωστων παραμέτρων $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ ακολουθεί Γάμμα(θ_1, θ_2) με πυκνότητα πιθανότητας $f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1)} x^{\theta_1 - 1} e^{-\theta_2 x} I_{(0,\infty)}(x)$.

5. Έστω $X_1, \dots, X_n \sim f(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{[0,\theta]}(x)$ όπου $\theta \in \Theta = (0, \infty)$ η άγνωστη παράμετρος.

(α) Ανήκει η παραπάνω οικογένεια στην ΕΟΚ;

(β) Βρείτε την ΕΜΠ, έστω $\widehat{\theta}$, της άγνωστης παραμέτρου θ.

(γ) Αποδείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = \widehat{\theta}/\theta$ είναι ποσότητα οδηγός, και χρησιμοποιώντας την κατασκευάστε διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για την παράμετρο θ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$, όπου $\alpha \in (0, 1)$.

6. Να κατασκευάσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο (ΟΙΕ) επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0, 1)$ για τις υποθέσεις

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \;\; H_1 : \theta > \theta_0$$

όπου $\theta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα $f(x, \theta) = \theta(1-x)^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. [Υπόδειξη: Βρείτε την κατανομή της $Y = -2\theta_0 \sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)$, όταν η πραγματική τιμή είναι $\theta = \theta_0$.]

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!