

Στατιστική Ι

Εξέταση 3 Φεβρουαρίου 2020

1. Έστω X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, \theta]$ $\theta \in \Theta = (1, \infty)$. Βρείτε (α) την ΕΜΠ, (β) την ΕΜΡ (ροποεκτιμήτρια) και (γ) την ΑΟΕΔ εκτιμήτρια του θ .

2. Έστω $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\theta)$ όπου $n \geq 2$ και $\theta \in \Theta = (0, \infty)$ άγνωστη παράμετρος. Διατυπώστε το θεώρημα Basu, και αποδείξτε μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T = \sum_{i=1}^n X_i$ και $S = X_1/T$ είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες.

3. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ το διάνυσμα των δεδομένων και $\delta = \delta(\mathbf{X})$ μία αμερόληπτη στατ. συνάρτηση για την παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ (θ η άγνωστη παράμετρος). Υποθέτουμε ότι η δ έχει πεπερασμένη διασπορά (για κάθε θ) και θεωρούμε την κλάση των αμερολήπτων εκτιμητριών του μηδενός,

$$U_0 := \{T : T = T(\mathbf{X}) \text{ στατ. συνάρτηση με } E_\theta T = 0 \text{ και } \text{Var}_\theta T < \infty \text{ για κάθε } \theta\}.$$

(α) Να δείξετε ότι η $\delta(\mathbf{X})$ είναι ΑΟΕΔ για την $g(\theta)$ αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστη με κάθε $T \in U_0$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), να αποδείξετε ότι αν η $\delta_1(\mathbf{X})$ είναι ΑΟΕΔ για την $g_1(\theta)$ και η $\delta_2(\mathbf{X})$ είναι ΑΟΕΔ για την $g_2(\theta)$ τότε η $\delta_1(\mathbf{X}) + \delta_2(\mathbf{X})$ είναι ΑΟΕΔ για την $g_1(\theta) + g_2(\theta)$.

4. Έστω X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, \theta)$, όπου $\theta \in \Theta = (0, \infty)$ η άγνωστη παράμετρος. Να κατασκευαστεί $(1 - \alpha)$ -ΔΕ για το θ (α) ίσων ουρών και (β) ελαχίστου μήκους.

5. Να κατασκευάσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο (ΟΙΕ) επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0, 1)$ για τις υποθέσεις

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

όπου $\theta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα $f(x; \theta) = 2\theta^2 x^3 e^{-\theta x^2} I_{(0, \infty)}(x)$, $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!