**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2018-19 ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ¨ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι¨**

**ΟΔΗΓΙΕΣ : 1)** Όσοι ακολουθούν το νέο πρόγραμμα σπουδών ή το παλαιό πρόγραμμα σπουδών και οφείλουν **και τα δύο μαθήματα ¨Μαθηματικά Ι¨ και ¨Μαθηματικά ΙΙΙ¨** θα απαντήσουν **σε τρία (3) από τα τέσσερα θέματα της Α′ Ομάδας και σε τρία (3) από τα τέσσερα θέματα της Β′ Ομάδας**.
**2)** Όσοι ακολουθούν το παλαιό πρόγραμμα σπουδών και οφείλουν **μόνον το μάθημα ¨ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι¨** θα απαντήσουν **σε όλα τα ερωτήματα της Ομάδας Α′**.
**3)** Όσοι ακολουθούν το παλαιό πρόγραμμα σπουδών και οφείλουν **μόνον το μάθημα ¨ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ¨** θα απαντήσουν σε **όλα τα ερωτήματα της Ομάδας Β′**.

**ΟΜΑΔΑ Α′**

**Θέμα 1ο: α)** Να δείξετε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ αποκλίνει, ενώ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει.

**β)** Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά με κέντρο το $x_0=0$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, όπου $-1<x<1$.

**Θέμα 2ο: α)** Η ακολουθία $(\alpha_n)$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1}=\sqrt{1+\alpha_n}$, για κάθε $n=1,2,3,\ldots$ Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(\alpha_n)$ συγκλίνει και να βρείτε το $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$.

**β)** Να βρείτε ποια καμπύλη παριστάνει στο επίπεδο $xOy$ η εξίσωση $x^2+y^2=8x+6y$.

**Θέμα 3ο:** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή γύρω από τον άξονα $y'y$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τις καμπύλες $y=\sqrt{x}$ και $y=x$.

**Θέμα 4ο:** Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y'+2xy=2x^3$, με αρχική συνθήκη $y(0)=1$.

**ΟΜΑΔΑ Β′**

**Θέμα 5ο:** Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_U xy^2\,dxdy$, όπου $U$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=x$ στο επίπεδο $xOy$.

**Θέμα 6ο:** Βρείτε την ελάχιστη απόσταση της αρχής $O$ των αξόνων στο σύστημα $Oxyz$ από την επιφάνεια

$$z^2=x^2y+4.$$

**Θέμα 7ο:** Βρείτε το έργο που παράγεται από μια δύναμη $\overrightarrow{\mathrm{F}}=(x+yz)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+(y+xz)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+(z+xy)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ καθώς μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης $\overrightarrow{\gamma(t)}=t\cdot\overrightarrow{\mathbf{i}}+t^2\cdot\overrightarrow{\mathbf{j}}+t^3\cdot\overrightarrow{\mathbf{k}}$, όπου $t\in[0,1]$.

**Θέμα 8ο:** Δίνεται η καμπύλη $C:(x,y)=(3\cos t,3\sin t)$, όπου $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους $\displaystyle\int_C x^2y\,ds$. $\big(ds$ το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης$\big)$.