

Σχολή Θετικών επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Όνοματεπώνυμο:

A.M.:

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2020 στο μάθημα:

Μαθηματική Στατιστική

Θέμα 1. Θεωρούμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$), για τις οποίες γνωρίζουμε ότι η X_1 ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $2\theta > 0$ (και μέση τιμή $1/(2\theta)$), ενώ οι X_2, \dots, X_n ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ (και μέση τιμή $1/\theta$).

i) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του θ .

ii) Να εξετάσετε αν η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του προηγούμενου ερωτήματος είναι και αμερόληπτη για το θ .

Θέμα 2. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Η X έχει συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f_X(x, \theta) = \frac{\theta}{3} x^{-2/3} e^{-\theta x^{1/3}} I_{(0,+\infty)}(x)$$

και η Y ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο θ , όπου $\theta \in \Theta = (0, +\infty)$ άγνωστη παράμετρος και για τις δύο κατανομές. Θεωρούμε το δείγμα (X, Y) .

i) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης σ.σ. του θ .

ii) Να βρεθεί η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του $1/\theta$. Είναι αυτή και αποτελεσματική (αποδοτική) για το $1/\theta$;

iii) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του θ .

iv) Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το θ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$ ($0 < a < 1$).

v) Να κατασκευασθεί ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος (ΟΙΕ) επιπέδου σημαντικότητας $a \in (0, 1)$ για την υπόθεση $H_0 : \theta \geq \theta_0$ έναντι της $H_1 : \theta < \theta_0$, όπου $\theta_0 > 0$ γνωστή σταθερά.

Να λυθούν όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 90 λεπτά.