

**Πιθανότητες Ι**  
**Εξέταση 22 Σεπτεμβρίου 2017**

**B**

1. (15 Βαθμοί) Μια συλλογή από 80 ερωτήσεις πιθανοτήτων περιέχει 4 δύσκολες και 76 εύκολες ερωτήσεις. Για τη δημιουργία ενός τεστ, επιλέγουμε στην τύχη 12 από αυτές τις ερωτήσεις. Ποια η πιθανότητα το τεστ να περιέχει ακριβώς 2 δύσκολες ερωτήσεις;

2. (20 Βαθμοί) Μια κάλπη περιέχει 6 άσπρα και 4 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο στην τύχη και έπειτα το επιστρέφουμε στην κάλπη μαζί με άλλα  $r$  του άλλου χρώματος. Έπειτα από την κάλπη επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο που επιλέγουμε να είναι άσπρο.

(β) Αν το δεύτερο σφαιρίδιο που επιλέξαμε ήταν άσπρο, να βρεθεί η πιθανότητα το πρώτο σφαιρίδιο να ήταν μαύρο. Πού τείνει αυτή η πιθανότητα καθώς  $r \rightarrow \infty$ . Εξηγήστε διαισθητικά γιατί το όριο έχει αυτή την τιμή.

3. (15 Βαθμοί) Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα  $f_X(x) = \frac{2}{x^3} \mathbf{1}_{x \in (1, \infty)}$ . Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής  $Y := \log X$ . Ποια κατανομή ακολουθεί η  $Y$ ;

4. (20 Βαθμοί) Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες και καθεμία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο  $(0, 1)$ . Θέτουμε  $(U, V) = (Y/X, Y)$ .

(α) Ποια είναι η απο κοινού πυκνότητα του ζεύγους  $(U, V)$ ; Σε ποιο σύνολο είναι θετική;

(β) Ποια είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής  $Y/X$ ;

5. (20 Βαθμοί) Η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) := E(e^{tX}) = \frac{1}{2} e^{5(e^t-1)} + c e^{2(e^t-1)}$$

για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , όπου  $c$  είναι μία σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η τιμή του  $c$ .

(β) Οι  $E(X), V(X)$ .

(γ) Η ροπογεννήτρια της  $2X + 1$ .

6. (20 Βαθμοί) Το σφάλμα μέτρησης,  $X$ , ενός οργάνου έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{c}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογίσετε την σταθερά  $c$ , την μέση τιμή και την διασπορά της  $X$ .

(β) Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 1500 ανεξάρτητων μετρήσεων να είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του 45;

Δίνονται  $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9772$ .

**Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι  $2\frac{1}{2}$  ώρες.**

**Καλή επιτυχία!**