ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Θέμα 1. Η ζημιά X έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{8}(4-x), \quad 0 \le x \le 4$, και ο ασφαλιζόμενος έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = \sqrt{w}$, και κεφάλαιο $w = 4$.
(α) Προσδιορίστε το μέγιστο ασφάλιστρο $G = G_{\max}$, που δέχεται να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος αν πρόκειται να καλύψει ολικά την X, καθώς και το μέσο κέρδος της εταιρείας.
(β) Αν $\Gamma = \Gamma_{\max}$ είναι το μέγιστο ασφάλιστρο που δέχεται να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος προκειμένου να καλύψει τα $7/8$ της X, να προσδιοριστεί εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από το Γ.
(γ) Για την κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς, $I_d(X) = \max\{0, X-d\}$, να προσδιορίσετε την $\mathbb{E}[I_d(X)], \quad 0 \le d \le 4$, ως συνάρτηση του d, και να αποδείξετε ότι για κάθε P, $0 < P < \frac{4}{3}$, η εξίσωση $\mathbb{E}[I_d(X)] = P$ έχει μοναδική λύση ως προς d. Επίσης να υπολογίσετε την σταθερά d για $P = 27/48$.

Θέμα 2. Υποθέτουμε ότι η S_1 είναι σύνθετη Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους $r \in \{1, 2, \ldots\}$ και $p = 1/2$ και συνάρτηση πιθανότητας ατομικής ζημιάς τη Γεωμετρική με παράμετρο $p_1 \in (0,1)$ (δηλαδή, $S_1 = X_1 + \cdots + X_{N_1}$ με $\mathbb{P}(N_1 = n_1) = \binom{n_1+r-1}{n_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{r+n_1}$, $n_1 = 0, 1, \ldots$, και $\mathbb{P}(X_i = x) = p_1(1-p_1)^x$, $x = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$). Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι η S_2 είναι σύνθετη Διωνυμική με παραμέτρους $r \in \{1, 2, \ldots\}$ και $p = 1/2$ (όπως για την S_1) και συνάρτηση πιθανότητας ατομικής ζημιάς τη Γεωμετρική με παράμετρο $p_2 \in (0,1)$ (δηλαδή, $S_2 = Y_1 + \cdots + Y_{N_2}$ με $\mathbb{P}(N_2 = n_2) = \binom{r}{n_2}\left(\frac{1}{2}\right)^r$, $n_2 = 0, 1, \ldots, r$, και $\mathbb{P}(Y_j = y) = p_2(1-p_2)^y$, $y = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$). Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων p_1 και p_2 τέτοιες ώστε οι S_1 και S_2 να έχουν την ίδια κατανομή (να είναι ισόνομες) και, αν υπάρχουν, να βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα p_1 και p_2.

Θέμα 3. (α) Τα (τυχαία) ετήσια επιτόκια $I_1, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[I_j] = i$ για $j = 1, \ldots, n$. Συμβολίζουμε με A_n και S_n την παρούσα και την συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων, αντίστοιχα, και έστω $a_{n,i}$ και $s_{n,i}$ η παρούσα και η συσσωρευμένη αξία της ίδιας ράντας με σταθερό (ντετερμινιστικό) επιτόκιο περιόδου i. Αποδείξτε ότι (i) $\mathbb{E}[S_n] = s_{n,i}$ και (ii) $\mathbb{E}[A_n] \ge a_{n,i}$.

(β) Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι (εδώ $\beta > 0$, σταθερά)

$$\mu(x) = \begin{cases} 20\beta \exp\left(1 - \dfrac{x^2}{100}\right), & 0 \le x \le 10, \\ 2\beta x, & x \ge 10. \end{cases}$$

Για τυχόν $x \ge 0$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x, δηλαδή του (x). Υπολογίστε (i) την συνάρτηση κατανομής της T_{10}, (ii) την πιθανότητα ${}_tp_{10}$ όπως ο (10) επιβιώσει για τουλάχιστον t ακόμη έτη, και (iii) την σταθερά β, αν είναι γνωστό ότι $\mathbb{E}[(20 + T_{10})T_{10}] = 600$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!