

B ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Θέμα 1. (α) Η ζημιά X ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50. Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει κεφάλαιο w_0 και ωφελισμοσυνάρτηση, $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/200}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο, Δ_{\min} , που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για αναλογική κάλυψη του 1/4 της ζημιάς;

(β) Η ζημιά X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \frac{7/4}{3^{7/4}}(3-x)^{3/4}$, $0 \leq x \leq 3$. Αν ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος έχει κεφάλαιο $w = 3$ και ωφελισμοσυνάρτηση $u(w) = w^{1/4}$, να υπολογίσετε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο, $G = G_{\max}$, που δέχεται να πληρώσει για ολική κάλυψη της X .

Θέμα 2. Η συνολική αποζημίωση που θα καταβάλει μία εταιρεία που καλύπτει δύο κατηγορίες κινδύνων είναι $S_\nu = \sum_{i=1}^{N_1} X_i + \sum_{j=1}^{N_2} Y_j$, όπου οι τυχαίες μεταβλητές $N_1, N_2, \{X_i, i \geq 1\}, \{Y_j, j \geq 1\}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, η N_1 είναι Poisson(3ν), η N_2 είναι Poisson(ν), και οι τυχαίες μεταβλητές X_i της πρώτης κατηγορίας κινδύνου ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 4]$, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές Y_j της δεύτερης κατηγορίας κινδύνου ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 2]$.

(α) Αποδείξτε ότι η S_ν ακολουθεί σύνθετη Poisson($\lambda, f(x)$), και προσδιορίστε τη σταθερά λ και την πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ των ατομικών ζημιών.

(β) Αν το συνολικό ασφάλιστρο που εισέπραξε η εταιρεία είναι ίσο με 7ν , να υπολογίσετε κατά προσέγγιση (για $\nu \rightarrow \infty$) την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία, κάνοντας χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος (και ελέγχοντας τις απαιτούμενες προϋποθέσεις ώστε αυτό να ικανοποιείται).

Θέμα 3. (α) Οι τυχαίες εντάσεις ανατοκισμού $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα πιθανότητας

$$g(y) = 7e^{-7y}, \quad y > 0.$$

Να υπολογισθούν (i) η πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ των αντιστοίχων ετησίων επιτοκίων ανατοκισμού $I_j = e^{\Delta_j} - 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, (ii) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη, και (iii) η πυκνότητα f_n της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη.

(β) Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq x < 40, \\ 2\lambda, & x \geq 40. \end{cases}$$

Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς λ εάν είναι γνωστό ότι ακριβώς το 50% των τριαντάρηδων του πληθυσμού επιβιώνει για άλλα 40 έτη.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2½ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!