Α   ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Θέμα 1. (α) Η ζημιά X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \frac{5/3}{2^{5/3}}(2-x)^{2/3}$, $0 \le x \le 2$. Αν ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος έχει κεφάλαιο $w = 2$ και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = w^{1/3}$, να υπολογίσετε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο, $G = G_{\max}$, που δέχεται να πληρώσει για ολική κάλυψη της X.

(β) Η ζημιά X ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 100. Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει κεφάλαιο w_0 και ωφελιμοσυνάρτηση, $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/200}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο, $\Delta_{\min}$, που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για αναλογική κάλυψη του 1/3 της ζημιάς;

Θέμα 2. Η συνολική αποζημίωση που θα καταβάλει μία εταιρεία που καλύπτει δύο κατηγορίες κινδύνων είναι $S_\nu = \sum_{i=1}^{N_1} X_i + \sum_{j=1}^{N_2} Y_j$, όπου οι τυχαίες μεταβλητές N_1, N_2, $\{X_i,\ i \ge 1\}$, $\{Y_j,\ j \ge 1\}$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, η N_1 είναι $\mathrm{Poisson}(\nu)$, η N_2 είναι $\mathrm{Poisson}(2\nu)$, και οι τυχαίες μεταβλητές X_i της πρώτης κατηγορίας κινδύνου ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,2]$, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές Y_j της δεύτερης κατηγορίας κινδύνου ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,6]$.

(α) Αποδείξτε ότι η S_ν ακολουθεί σύνθετη $\mathrm{Poisson}(\lambda, f(x))$, και προσδιορίστε τη σταθερά λ και την πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ των ατομικών ζημιών.

(β) Αν το συνολικό ασφάλιστρο που εισέπραξε η εταιρεία είναι ίσο με 7ν, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση (για $\nu \to \infty$) την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία, κάνοντας χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος (και ελέγχοντας τις απαιτούμενες προϋποθέσεις ώστε αυτό να ικανοποιείται).

Θέμα 3. (α) Οι τυχαίες εντάσεις ανατοκισμού $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα πιθανότητας

$$g(y) = 10e^{-10y},\ y > 0.$$

Να υπολογισθούν (i) η πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ των αντιστοίχων ετησίων επιτοκίων ανατοκισμού $I_j = e^{\Delta_j} - 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, (ii) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη, και (iii) η πυκνότητα f_n της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη.

(β) Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda, & 0 \le x < 30, \\ 2\lambda, & x \ge 30. \end{cases}$$

Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς λ εάν είναι γνωστό ότι ακριβώς το 50% των εικοσάρηδων του πληθυσμού επιβιώνει για άλλα 40 έτη.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!