# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008 B

**Θέμα 1.** Υποψήφιος ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο $w$ και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - e^{-w/20}$ αντιμετωπίζει δύο ανεξάρτητους κινδύνους $X_1$, $X_2$, με πυκνότητες

$$f_{X_1}(x) = 2e^{-2x}, \ x > 0, \qquad f_{X_2}(x) = 3e^{-3x}, \ x > 0.$$

Σκέπτεται να προβεί σε ολική κάλυψη των ζημιών, αλλά μπορεί να διαλέξει μεταξύ δύο εκδοχών: Να ασφαλιστεί χωριστά για τις ζημιές $X_1$, $X_2$ σε δύο εταιρείες, ή να ασφαλιστεί για όλη τη ζημιά $X = X_1 + X_2$ σε μία εταιρεία.
(α) Προσδιορίστε τα μέγιστα αποδεκτά ασφάλιστρα $G_1$, $G_2$ για την πρώτη εκδοχή, καθώς και το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο $G$ για τη δεύτερη εκδοχή.
(β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/30}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο $H$ που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για ολική κάλυψη της παραπάνω συνολικής ζημιάς $X$; Υπάρχει ασφαλιστική πολιτική όσον αφορά τη δεύτερη εκδοχή;
[Δίνονται κατά προσέγγιση χιλιοστού: $20\log\frac{20}{19} = 1.026$, $20\log\frac{40}{39} = 0.506$, $20\log\frac{60}{59} = 0.336$, $20\log\frac{80}{79} = 0.252$, $30\log\frac{30}{29} = 1.017$, $30\log\frac{60}{59} = 0.504$, $30\log\frac{90}{89} = 0.335$, $30\log\frac{120}{119} = 0.251$.]

**Θέμα 2.** Τα ποσά των ατομικών ζημιών $X_1, X_2, \dots$ που θα καταβάλει ο κλάδος ζημιών μιας εταιρείας κατά το επόμενο έτος είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, και ακολουθούν Εκθετική Κατανομή με παράμετρο $1/10$, δηλ. έχουν πυκνότητα

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{10}e^{-x/10}, \ x > 0, \ i = 1, 2, \dots \ .$$

Το πλήθος ζημιών $N_\nu$ ακολουθεί διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}(N_\nu = 0) = \frac{\nu - 1}{2\nu - 1}, \quad \mathbb{P}(N_\nu = 2\nu - 1) = \frac{\nu}{2\nu - 1},$$

επομένως η συνολική αποζημίωση θα είναι $S_\nu = S_{N_\nu} = X_1 + \cdots + X_{N_\nu}$.
(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\mathrm{Var}[S_\nu]$, της $S_\nu$.
(β) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της $S_\nu$.
(γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, βρίσκοντας προς ποια κατανομή συγκλίνει η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$\frac{S_\nu - \mathbb{E}[S_\nu]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_\nu]}}$$

καθώς $\nu \to \infty$. [Υπόδειξη: Ίσως φανεί χρήσιμο να προσδιορίσετε τη ροπογεννήτρια της δίτιμης τυχαίας μεταβλητής $Y$ με $\mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$.]

**Θέμα 3.** Η ένταση θνησιμότητας για τον πληθυσμό Α είναι $\mu_1(x) = \theta/(1 + x)$, $x > 0$, ενώ για τον πληθυσμό Β είναι $\mu_2(x) = a + \theta/(1 + x)$, $x > 0$, όπου $a$ και $\theta$ είναι θετικές σταθερές. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ${}_{10}p_{40}^{(1)}$ όπως ένας σαραντάρης του πληθυσμού Α επιβιώσει για άλλα 10 έτη είναι $1681/2601 = (41/51)^2$, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα ${}_{10}p_{40}^{(2)}$ για τους σαραντάρηδες του πληθυσμού Β είναι η μισή, $1681/5202$. Να βρείτε (α) τη σταθερά $a$, (β) τη σταθερά $\theta$ και (γ) τη μέση υπόλοιπη ζωή των σαραντάρηδων του πληθυσμού Α.

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**