

Θέμα 1. Υποψήφιος ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο w και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - e^{-w/30}$ αντιμετωπίζει δύο ανεξάρτητους κινδύνους X_1, X_2 , με πυκνότητες

$$f_{X_1}(x) = e^{-x}, \quad x > 0, \quad f_{X_2}(x) = 4e^{-4x}, \quad x > 0.$$

Σκέπτεται να προβεί σε ολική κάλυψη των ζημιών, αλλά μπορεί να διαλέξει μεταξύ δύο εκδοχών: Να ασφαλιστεί χωριστά για τις ζημιές X_1, X_2 σε δύο εταιρείες, ή να ασφαλιστεί για όλη τη ζημιά $X = X_1 + X_2$ σε μία εταιρεία.

(α) Προσδιορίστε τα μέγιστα αποδεκτά ασφάλιστρα G_1, G_2 για την πρώτη εκδοχή, καθώς και το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο G για τη δεύτερη εκδοχή.

(β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/20}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο H που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για ολική κάλυψη της παραπάνω συνολικής ζημιάς X ; Υπάρχει ασφαλιστική πολιτική όσον αφορά τη δεύτερη εκδοχή; [Δίνονται κατά προσέγγιση χιλιοστού: $20 \log \frac{20}{19} = 1.026$, $20 \log \frac{40}{39} = 0.506$, $20 \log \frac{60}{59} = 0.336$, $20 \log \frac{80}{79} = 0.252$, $30 \log \frac{30}{29} = 1.017$, $30 \log \frac{60}{59} = 0.504$, $30 \log \frac{90}{89} = 0.335$, $30 \log \frac{120}{119} = 0.251$.]

Θέμα 2. Τα ποσά των ατομικών ζημιών X_1, X_2, \dots που θα καταβάλει ο κλάδος ζημιών μιας εταιρείας κατά το επόμενο έτος είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, και ακολουθούν Εκθετική Κατανομή με παράμετρο $1/25$, δηλ. έχουν πυκνότητα

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{25} e^{-x/25}, \quad x > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Το πλήθος ζημιών N_ν ακολουθεί διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}(N_\nu = 0) = \frac{2\nu - 1}{3\nu - 1}, \quad \mathbb{P}(N_\nu = 3\nu - 1) = \frac{\nu}{3\nu - 1},$$

επομένως η συνολική αποζημίωση θα είναι $S_\nu = S_{N_\nu} = X_1 + \dots + X_{N_\nu}$.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\text{Var}[S_\nu]$, της S_ν .

(β) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν .

(γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, βρίσκοντας προς ποια κατανομή συγκλίνει η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$\frac{S_\nu - \mathbb{E}[S_\nu]}{\sqrt{\text{Var}[S_\nu]}}$$

καθώς $\nu \rightarrow \infty$. [Υπόδειξη: Ίσως φανεί χρήσιμο να προσδιορίσετε τη ροπογεννήτρια της δίτιμης τυχαίας μεταβλητής Y με $\mathbb{P}(Y = -1/\sqrt{2}) = 2/3$, $\mathbb{P}(Y = \sqrt{2}) = 1/3$.]

Θέμα 3. Η ένταση θνησιμότητας για τον πληθυσμό A είναι $\mu_1(x) = a/(1+x)$, $x > 0$, ενώ για τον πληθυσμό B είναι $\mu_2(x) = \theta + a/(1+x)$, $x > 0$, όπου a και θ είναι θετικές σταθερές. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ${}_{10}p_{30}^{(1)}$ όπως ένας τριαντάρης του πληθυσμού A επιβιώσει για άλλα 10 έτη είναι $961/1681 = (31/41)^2$, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα ${}_{10}p_{30}^{(2)}$ για τους τριαντάρηδες του πληθυσμού B είναι η μισή, $961/3362$. Να βρείτε (α) τη σταθερά a , (β) τη σταθερά θ και (γ) τη μέση υπόλοιπη ζωή των τριαντάρηδων του πληθυσμού A.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!