ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1. Η ζημιά X έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{2}{9}(3-x), \quad 0 \leq x \leq 3$, και ο ασφαλιζόμενος έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = \sqrt{w}$, και κεφάλαιο $w = 3$.
(α) Προσδιορίστε το μέγιστο ασφάλιστρο $G = G_{\max}$, που δέχεται να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος αν πρόκειται να καλύψει ολικά την X, καθώς και το μέσο κέρδος της εταιρείας.
(β) Αν $\Gamma = \Gamma_{\max}$ είναι το μέγιστο ασφάλιστρο που δέχεται να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος προκειμένου να καλύψει τα 3/4 της X, να προσδιοριστεί εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από το Γ.
(γ) Για την κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς, $I_d(X) = \max\{0, X-d\}$, να προσδιορίσετε την $\mathbb{E}[I_d(X)], \quad 0 \leq d \leq 3$, ως συνάρτηση του d, και να αποδείξετε ότι για κάθε P, $0 < P < 1$, η εξίσωση $\mathbb{E}[I_d(X)] = P$ έχει μοναδική λύση ως προς d. Επίσης να υπολογίσετε την σταθερά d για $P = 1/8$.

Θέμα 2. Η πιθανότητα πυρκαγιάς σε καθένα από 10000 κτήρια που ασφαλίζει μια εταιρεία (στη διάρκεια ενός έτους) είναι 1/5, το δε ύψος της αποζημίωσης για καθένα από αυτά (αν συμβεί πυρκαγιά) είναι τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{2}{9}(3-x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Η εταιρεία λαμβάνει ασφάλιστρο ίσο με 0.2 για κάθε κτήριο που ασφαλίζει. Έστω S η συνολική αποζημίωση που θα κληθεί να πληρώσει η εταιρεία. Να υπολογίσετε (α) την μέση αποζημίωση, $\mathbb{E}(S)$, που θα καταβάλλει η εταιρεία, (β) την διασπορά $\mathrm{Var}(S)$, (γ) την ροπογεννήτρια $M_S(t)$, και (δ) την πιθανότητα (κατά προσέγγιση) να ζημιωθεί η εταιρεία.

Θέμα 3. (α) Οι (τυχαίες) ετήσιες εντάσεις ανατοκισμού $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα

$$g(\delta) = 98\delta, \quad 0 \leq \delta \leq 1/7.$$

Να υπολογιστούν (i) η πυκνότητα $f(i)$ των ετήσιων επιτοκίων $I_j = e^{\Delta_j} - 1$, $j = 1, 2, \ldots$, και (ii) η μέση συσσωρευμένη (μέλλουσα) αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων.
(β) Τα (τυχαία) ετήσια επιτόκια $I_1, I_2, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθένα με πυκνότητα

$$f(i) = 98i, \quad 0 \leq i \leq 1/7.$$

Να υπολογιστούν (i) η πυκνότητα $g(\delta)$ των αντιστοίχων εντάσεων ανατοκισμού $\Delta_j = \log(1+I_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, και (ii) η μέση συσσωρευμένη (μέλλουσα) αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!