

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

Θέμα 1. (i) Άτομο με ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 10w - w^2$ και κεφάλαιο $w = 5$ πρόκειται να ασφαλιστεί για ολική κάλυψη ζημιάς X με πυκνότητα $f(x) = 3(1-x)^2$, $0 < x < 1$. Να υπολογιστεί το μέγιστο ασφάλιστρο G_{\max} που δέχεται να πληρώσει ο υποψήφιος ασφαλισμένος.

(ii) Αν το ασφάλιστρο για μερική κάλυψη $I(X)$ ζημιάς X έχει καθοριστεί (από την εταιρεία) ως

$$G = \frac{5}{4} \mathbb{E}[I(X)],$$

και η ζημιά X έχει Εκθετική Κατανομή με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, να εκφράσετε τη σταθερά d , για μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς της μορφής $I(X) = I_d(X) = \max\{0, X - d\}$, συναρτήσει του ασφάλιστρου G (εδώ υποτίθεται ότι $0 < G < 5/4 = 1.25$).

Θέμα 2. Τα ποσά των ατομικών ζημιών X_1, X_2, \dots (σε χιλιάδες Ευρώ) που πρόκειται να καταβάλλει ο κλάδος ζημιών μιας εταιρείας στη διάρκεια του επόμενου έτους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με Εκθετική Κατανομή, δηλαδή με πυκνότητες $f_{X_i}(x) = e^{-x}$, $x > 0$, $i = 1, 2, \dots$, το δε πλήθος ζημιών N_ν ακολουθεί διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}[N_\nu = 0] = \frac{\nu - 1}{2\nu - 1}, \quad \mathbb{P}[N_\nu = 2\nu - 1] = \frac{\nu}{2\nu - 1}.$$

Έστω $S_\nu = S_{N_\nu} = X_1 + \dots + X_{N_\nu}$ η συνολική αποζημίωση που θα πληρώσει ο κλάδος της εταιρείας.

(α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\text{Var}[S_\nu]$, της S_ν .

(γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, βρίσκοντας την οριακή κατανομή για την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$\frac{S_\nu - \mathbb{E}[S_\nu]}{\sqrt{\text{Var}[S_\nu]}}$$

καθώς το $\nu \rightarrow \infty$. [Υπόδειξη: Ίσως φανεί χρήσιμο να υπολογίσετε τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με $\mathbb{P}[Y = -1] = \mathbb{P}[Y = 1] = 1/2$.]

Θέμα 3. Η θνησιμότητα ατόμου ηλικίας x είναι $\mu_x = \theta/(x+1)$, $x \geq 0$, όπου $\theta > 1$. Για τυχόν $x \geq 0$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x , δηλαδή του (x) . Υπολογίστε (α) τη συνάρτηση επιβίωσης $s(x)$, (β) την πιθανότητα ${}_t p_x$ όπως ο (x) επιβιώσει για t ακόμη έτη, και (γ) τη μέση υπόλοιπη ζωή, $\mathbb{E}[T_x]$, του (x) . (δ) Αν είναι γνωστό ότι η μέση υπόλοιπη ζωή του (3) είναι 80 έτη, να βρείτε τη σταθερά θ .

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!