

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Θέμα 1. Άτομο με ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - e^{-w/1000}$ και κεφάλαιο $w = 10000$ (Ευρώ), σκέπτεται να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη $I(X)$ ζημιάς X με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1000)$, διαθέτοντας ασφάλιστρο $G = 100$. Η πολιτική της ασφαλιστικής εταιρείας σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να επιβαρύνει τον ασφαλιζόμενο κατά $\theta = 25\%$ της μέσης κάλυψης, δηλαδή καθορίζει το ασφάλιστρο ως

$$G = (1 + \theta)\mathbb{E}[I(X)] = \frac{5}{4}\mathbb{E}[I(X)].$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά d αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει σε μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς της μορφής $I(X) = I_d(X) = \max\{0, X - d\}$.

(β) Υπολογίστε τη σταθερά p αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει σε αναλογική κάλυψη της μορφής $I(X) = J_p(X) = pX$.

(γ) Προτείνετε στον υποψήφιο ασφαλιζόμενο να προχωρήσει σε κάποια κάλυψη, και αν ναι, σε ποιά από τις δύο;

Θέμα 2. Τα ποσά των ατομικών ζημιών X_1, X_2, \dots (σε χιλιάδες Ευρώ) που πρόκειται να καταβάλλει ο κλάδος ζημιών μιας εταιρείας στη διάρκεια του επόμενου έτους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με Εκθετική κατανομή παραμέτρου 1, δηλαδή με πυκνότητες $f_{X_i}(x) = e^{-x}$, $x > 0$, $i = 1, 2, \dots$, το δε πλήθος ζημιών N_ν ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους $r = \nu > 0$ και $p = 1/2$, δηλαδή

$$\mathbb{P}[N_\nu = n] = \binom{\nu + n - 1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Έστω $S_\nu = S_{N_\nu} = X_1 + \dots + X_{N_\nu}$ η συνολική αποζημίωση που θα πληρώσει ο κλάδος της εταιρείας.

(α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\text{Var}[S_\nu]$ της S_ν .

(γ) Το συνολικό αποθεματικό της εταιρείας για την κάλυψη αυτού του τύπου των ζημιών είναι $w = 1000$ (χιλιάδες Ευρώ) και οι αναλογιστές της εν λόγω εταιρείας έχουν υπολογίσει ότι η παράμετρος $\nu = 1000$. Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα να ζημιώσει η εταιρεία στον κλάδο αυτό, δηλαδή την $\mathbb{P}[S_{1000} > 1000]$. [Σημείωση: Να αναφερθούν όλες οι υποθέσεις όποιου θεωρήματος χρησιμοποιηθεί στο ερώτημα (γ), και να ελεγχθεί η ισχύς τους.]

Θέμα 3. Επταετές δάνειο ύψους $P = 7000$ (Ευρώ) με επιτόκιο 6% το χρόνο, θα αρχίσει να αποπληρώνεται με ληξιπρόθεσμες μηνιαίες καταβολές αφότου συμπληρωθούν 2 χρόνια από τη λήψη του, και συγκεκριμένα:

(i) τους πρώτους 24 μήνες δεν θα πληρώνεται οποιαδήποτε δόση,

(ii) τους επόμενους 12 μήνες θα πληρώνονται μόνο οι τόκοι, και

(iii) τους τελευταίους 48 μήνες θα αποπληρώνεται και το κεφάλαιο με ισόποσες δόσεις ύψους R .

Θεωρώντας ανατοκιστική περίοδο τον ένα μήνα σε όλη τη διάρκεια της επταετίας (δηλαδή και στους 24 πρώτους μήνες), να υπολογίσετε το ύψος της δόσης R καθώς και το ύψος των 12 μηνιαίων καταβολών τόκων για τους 12 μήνες του (ii).

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!