

## ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2001

**Θέμα 1.** Άτομο με κεφάλαιο  $w = 10$  και ωφελιοσυνάρτηση  $u(w) = 20w - w^2$  πρόκειται να ασφαλιστεί για ολική κάλυψη ζημιάς  $Q$  με πυκνότητα

$$f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1.$$

Η ασφαλιστική εταιρεία που προτίθεται να ασφαλίσει τη ζημιά διαθέτει κεφάλαιο  $w_0 = 1000000$  και ωφελιοσυνάρτηση  $u_I(w_0) = 1 - \exp(-w_0)$ .

(α) Υπολογίστε το μέγιστο ασφάλιστρο  $G_{\max}$  που δέχεται να πληρώσει ο υποψήφιος ασφαλισμένος.

(β) Υπολογίστε το ελάχιστο ασφάλιστρο  $H_{\min}$  που μπορεί να δεχθεί η εταιρεία για ολική κάλυψη της  $Q$ .

(γ) Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική; Αν ναι, βρείτε κάποια δυνατή τιμή του ασφάλιστρου. Αν όχι, εξηγήστε διαισθητικά για ποιο λόγο συμβαίνει αυτό.

**Θέμα 2.** Στο συλλογικό μοντέλο κινδύνου μιας περιόδου, έστω  $S = X_1 + \dots + X_N$  η συνολική ζημιά της εταιρείας, όπου το πλήθος ζημιών  $N$  είναι Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή  $\Gamma(1/3)$  με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}[N = n] = \frac{2^n}{3^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

στοχαστικά ανεξάρτητη από τις ατομικές ζημιές  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , οι οποίες είναι ανεξάρτητες Bernoulli  $b(1/4)$ , δηλαδή έχουν συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{4} = 1 - \mathbb{P}[X_i = 0], \quad i = 1, 2, \dots$$

(α) Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας της  $S$ .

(β) Υπολογίστε την μέση τιμή  $\mathbb{E}(S)$  και τη διασπορά  $\text{Var}(S)$  της  $S$ .

(γ) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες τιμές του  $k$  για τις οποίες

$$\mathbb{P}[S \leq (1+k)\mathbb{E}(S)] = \mathbb{P}[S \leq \mathbb{E}(S) + k\text{Var}(S)] = \frac{26}{27}.$$

**Θέμα 3.** Η θνησιμότητα ατόμου ηλικίας  $x$  είναι

$$\mu_x = \frac{x}{40(40+x)}, \quad x > 0.$$

Υπολογίστε (α) τη συνάρτηση επιβίωσης  $s(x)$ ,  $x > 0$ , (β) την πιθανότητα όπως άτομο ηλικίας 40 ετών πεθάνει στο ηλικιακό διάστημα  $[50, 60)$  και (γ) τη μέση υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας 40 ετών.

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ  $2\frac{1}{2}$  ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**