ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

Θέμα 1. Άτομο με ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = w^{1/4}$ και κεφάλαιο $w = 10000$ (Ευρώ), σκέπτεται να ασφαλιστεί για μερική κάλυψη $I(X)$ ζημιάς X με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 200)$, διαθέτοντας ασφάλιστρο $G = 75$. Η πολιτική της ασφαλιστικής εταιρείας σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να επιβαρύνει τον ασφαλιζόμενο κατά $\theta = 33.3\%$ της μέσης κάλυψης, δηλαδή καθορίζει το ασφάλιστρο ως

$$G = (1+\theta)\mathbb{E}[I(X)] = \frac{4}{3}\mathbb{E}[I(X)].$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά d αν ο ασφαλισμένος αποφασίσει να προχωρήσει σε μερική κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς της μορφής $I(X) = I_d(X) = \max\{0, X - d\}$. (β) Υπολογίστε τη σταθερά p αν ο ασφαλισμένος προχωρήσει σε αναλογική κάλυψη της μορφής $I(X) = J_p(X) = pX$. (γ) Υπολογίστε τη μέση ωφέλεια του υποψήφιου ασφαλιζόμενου αν προχωρήσει στην κάλυψη $I_d(X)$, με d όπως στο ερώτημα (α), και αν δεν προχωρήσει σε κάλυψη της ζημιάς.

Θέμα 2. Μια εταιρεία έχει αναλάβει να καλύψει τις ζημιές από ν φορτηγά αυτοκίνητα στη διάρκεια του επόμενου έτους. Κάθε φορτηγό (από τα ν) έχει πιθανότητα $p_\nu = 3/\nu$ να εμπλακεί σε ατύχημα, και για κάθε φορτηγό που θα εμπλακεί σε ατύχημα είναι γνωστό ότι το ύψος της ατομικής ζημιάς X_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Έτσι, η $S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_\nu}$ παριστάνει τη συνολική αποζημίωση που θα κληθεί να καλύψει ο κλάδος της εταιρείας στη διάρκεια του έτους, όπου N_ν είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το πλήθος των ζημιών που θα συμβούν.
(α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\mathrm{Var}[S_\nu]$, της S_ν.
(γ) Να δείξετε ότι, καθώς $\nu \to \infty$, η S_ν συγκλίνει κατά κατανομή προς μία σύνθετη $\mathrm{Poisson}(\lambda, Y)$, και να προσδιορίσετε τη σταθερά λ και την κατανομή της Y.

Θέμα 3. (α) Τα (τυχαία) ετήσια επιτόκια $I_1, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[I_j] = i$ για $j = 1, \ldots, n$. Συμβολίζουμε με A_n και S_n την παρούσα και την συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων, αντίστοιχα, και έστω $a_{n,i}$ και $s_{n,i}$ η παρούσα και η συσσωρευμένη αξία της ίδιας ράντας με σταθερό (ντετερμινιστικό) επιτόκιο περιόδου i. Αποδείξτε ότι (i) $\mathbb{E}[S_n] = s_{n,i}$ και (ii) $\mathbb{E}[A_n] \geq a_{n,i}$.
(β) Η ένταση θνησιμότητας σε έναν πληθυσμό είναι

$$\mu(x) = \frac{a}{x+1}, \quad x \geq 0.$$

όπου $a > 0$ σταθερά. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα ${}_{10}p_{40}$ να επιβιώσει ένας σαραντάρης για τουλάχιστον ακόμη δέκα έτη είναι ${}_{10}p_{40} = \left(\frac{41}{51}\right)^2$. Υπολογίστε (i) την σταθερά a, (ii) την πιθανότητα ${}_tp_x$ όπως ο (x) (δηλ. άτομο ηλικίας x) επιβιώσει για t ακόμη έτη, και (iii) τη μέση υπόλοιπη ζωή, $\mathbb{E}[T_x]$, του (x).

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!