A ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2012

Θέμα 1. Υποψήφιος ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο w και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - e^{-2w}$ σκέπτεται να προβεί σε μερική κάλυψη της μορφής $I_d(X) = \max\{0, X - d\}$ τυχαίας ζημιάς X με $X \sim \mathcal{E}(4)$, δηλ. η X έχει πυκνότητα $f_X(x) = 4e^{-4x}$, $x > 0$. Αν είναι γνωστό ότι $d = \log 3$:

(α) Να προσδιορίσετε το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο, $G_{\max}$, που δέχεται να καταβάλλει ο υποψήφιος ασφαλιζόμενος για την μερική αυτή κάλυψη.

(β) Αν και η ασφαλιστική εταιρεία έχει την ίδια ωφελιμοσυνάρτηση, $u_I(w) = 1 - e^{-2w}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο, $H_{\min}$, που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για την μερική αυτή κάλυψη;

(γ) Εξετάστε αν υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική και, αν υπάρχει, προτείνετε μία αποδεκτή τιμή για το ύψος του ασφαλίστρου.

Θέμα 2. Οι ατομικές ζημιές X_i, $i = 1, 2, \ldots$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή Poisson με παράμετρο 3, δηλ. έχουν συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i = x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots, \ i = 1, 2, \ldots \ .$$

Η εταιρεία θα καλύψει τη συνολική ζημιά του κλάδου, $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, όπου ο αριθμός των ζημιών, N, είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο σύνολο $\{0, 1, \ldots\}$ και ανεξάρτητη από τις X_i. Υποθέτουμε ότι η πιθανογεννήτρια της N είναι της μορφής

$$P_N(u) = \mathbb{E}[u^N] = \alpha + (1-\alpha)\beta\frac{u}{1-(1-\beta)u}, \quad |u| < \frac{1}{1-\beta},$$

όπου $\alpha, \beta \in (0, 1)$ είναι άγνωστες παράμετροι. Να υπολογίσετε (α) την πιθανογεννήτρια της S και (β) τις τιμές των παραμέτρων α και β, αν είναι γνωστό ότι $\mathbb{E}[S] = 15$ και $\mathrm{Var}[S] = 375$.

Θέμα 3. (α) Τα τυχαία επιτόκια $I_1, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθένα με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{10}{(1+x)^{11}}, \ x > 0.$$

Να υπολογισθούν (i) η πυκνότητα $g(y)$ των αντιστοίχων ετησίων εντάσεων ανατοκισμού $\Delta_j = \log(1 + I_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, (ii) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη, και (iii) η πυκνότητα f_n της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη.

(β) Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι (εδώ $\lambda, \mu > 0$, σταθερές)

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda, & 0 \le x < 10, \\ \mu, & x \ge 10. \end{cases}$$

Για τυχόν $x \ge 0$, συμβολίζουμε με $T(x)$ την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x, δηλαδή του (x). Υπολογίστε (i) την συνάρτηση κατανομής της $T(5)$, (ii) την πιθανότητα ${}_tp_5$ όπως ο (5) επιβιώσει για τουλάχιστον t ακόμη έτη, και (iii) την αναμενόμενη υπόλοιπη ζωή του (5).

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!