A **ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2008**

Θέμα 1. Υποψήφιος ασφαλιζόμενος με κεφάλαιο w και ωφελιμοσυνάρτηση $u(w) = 1 - e^{-w/10}$ αντιμετωπίζει δύο ανεξάρτητους κινδύνους X_1, X_2, με πυκνότητες

$$f_{X_1}(x) = xe^{-x},\ x > 0, \qquad f_{X_2}(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{-x},\ x > 0.$$

Σκέπτεται να προβεί σε ολική κάλυψη των ζημιών, αλλά μπορεί να διαλέξει μεταξύ δύο εκδοχών: Να ασφαλιστεί χωριστά για τις ζημιές X_1, X_2 σε δύο εταιρείες, ή να ασφαλιστεί για όλη τη ζημιά $X = X_1 + X_2$ σε μία εταιρεία. (α) Προσδιορίστε τα μέγιστα αποδεκτά ασφάλιστρα G_1, G_2 για την πρώτη εκδοχή, καθώς και το μέγιστο αποδεκτό ασφάλιστρο G για τη δεύτερη εκδοχή. (β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/20}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο H που θα απαιτήσει από τον ασφαλιζόμενο για ολική κάλυψη της παραπάνω συνολικής ζημιάς X; Υπάρχει ασφαλιστική πολιτική όσον αφορά τη δεύτερη εκδοχή; (γ) Αν F_1 είναι η συνάρτηση κατανομής της X_1, και $I_d(X_1) = \max = \{0, X_1 - d\}$ η μερική κάλυψη υπερβάλοντος ζημίας για την X_1, να αποδείξετε ότι για τυχόν $d > 0$,

$$\mathbb{E}[I_d(X_1)] = \int_d^\infty (1 - F_1(y))dy.$$

Με βάση την προηγούμενη έκφραση να συμπεράνετε ότι η εξίσωση $\mathbb{E}[I_d(X_1)] = P$ έχει μοναδική λύση (ως προς d) για κάθε (σταθερό) $P \in (0,2)$, και να υπολογίσετε το ποσό αποκοπής d για το οποίο $\mathbb{E}[I_d(X_1)] = \frac{21}{10}e^{-1/10}$.

Θέμα 2. Οι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_i = X_i^{(\nu)}$, $i = 1, 2, \ldots$ ακολουθούν $\Gamma(1/\nu, 1)$ κατανομή, δηλ. έχουν πυκνότητα

$$f_{X_i} = \frac{x^{\frac{1}{\nu}-1}}{\Gamma(\frac{1}{\nu})}e^{-x},\ x > 0,\ i = 1, 2, \ldots\ .$$

Μια εταιρεία έχει αναλάβει να καλύψει τη συνολική ζημιά $S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_\nu}$, όπου ο αριθμός των ζημιών N_ν ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο ν, και είναι ανεξάρτητος από τα ύψη των ατομικών ζημιών X_i, $i = 1, 2, \ldots$. (α) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\mathrm{Var}[S_\nu]$, της S_ν. (β) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν. (γ) Βρείτε προς ποια κατανομή συγκλίνει η S_ν καθώς $\nu \to \infty$, και προσδιορίστε κατά προσέγγιση την $\mathbb{P}(S_{100} > 2)$.

Θέμα 3. (α) Τα τυχαία επιτόκια $I_1, \ldots, I_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθένα με πυκνότητα

$$f(x) = 12000\ x^2(1 - 10x), \quad 0 < x < 1/10.$$

Να υπολογισθούν (i) η πυκνότητα $g(y)$ των αντιστοίχων ετησίων εντάσεων ανατοκισμού $\Delta_j = \log(1 + I_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, (ii) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη, και (iii) η μέση συσσωρευμένη αξία της προκαταβαλόμενης ράντας n περιόδων.

(β) Η ένταση θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι (εδώ $a > 0$, σταθερά)

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{20e}{a}e^{-\frac{x^2}{100}}, & 0 \le x \le 10, \\ \dfrac{2x}{a}, & x \ge 10. \end{cases}$$

Για τυχόν $x \ge 0$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x, δηλαδή του (x). Υπολογίστε (i) την συνάρτηση κατανομής της T_{10}, (ii) την πιθανότητα ${}_tp_{10}$ όπως ο (10) επιβιώσει για τουλάχιστον t ακόμη έτη, και (iii) την σταθερά a, αν είναι γνωστό ότι $\mathbb{E}[(20 + T_{10})T_{10}] = 600$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!